

第一讲

2026 年 8 月 2 日 星期日 13:53

1 从 Newton 引力到 Laplace 方程

设质量 m 位于 $y \in \mathbb{R}^3$, 单位质点位于 $x \neq y$, 取引力常数为 1。则单位质点受到的引力场为

$$\vec{g}_y(x) = m \frac{y - x}{|y - x|^3},$$

其方向指向 y , 大小为 $m/|x - y|^2$ 。

若有有限个质点 (m_j, y_j) , 由叠加原理,

$$\vec{g}(x) = \sum_j m_j \frac{y_j - x}{|y_j - x|^3}.$$

设质量以密度 $\rho \geq 0$ 分布在有限区域中。连续分布时,

$$\vec{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \frac{y - x}{|y - x|^3} dy,$$

这就是引力场。形式计算可知, 引力场为保守场:

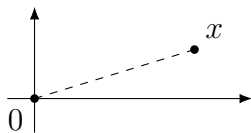
$$\nabla \times \vec{g} = \left(\frac{\partial g^3}{\partial x_2} - \frac{\partial g^2}{\partial x_3}, \frac{\partial g^1}{\partial x_3} - \frac{\partial g^3}{\partial x_1}, \frac{\partial g^2}{\partial x_1} - \frac{\partial g^1}{\partial x_2} \right) = (0, 0, 0).$$

因此存在 Newton 势

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|} dy, \quad \nabla U = \vec{g}.$$

例 1. 位于原点的点源产生的牛顿势为 (物理意义: 从 x 点移到无穷远所作的功)

$$u(x) = - \int_{\infty}^x \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot d\vec{x} = - \int_{+\infty}^{|x|} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r} \Big|_{+\infty}^{|x|} = \frac{1}{|x|}.$$



另一方面, 引力场 $\vec{g}$ 通过任意闭合曲面 $S = \partial\Omega$ 的通量为

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4\pi M_\Omega = -4\pi \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (1)$$

这就是高斯定律。

例 2. 点质量 m 位于原点，它产生的引力场为

$$\vec{g}(x) = -m \frac{x}{|x|^3}.$$

在球面 ∂B_r 上, $\vec{n} = x/|x|$, 故

$$\int_{\partial B_r} \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial B_r} -\frac{m}{|x|^2} \, dS = -4\pi m.$$

由散度定理,

$$\int_{\partial \Omega} \vec{g} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{g} \, dx. \quad (2)$$

比较 (1) 与 (2), 得到

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\rho.$$

代入 $\vec{g} = \nabla U$, 得到

$$\Delta U = -4\pi\rho. \quad (\text{Laplace 方程})$$

相应的 Dirichlet 问题为

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi\rho, & \text{in } \Omega, \\ u = \phi, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

其中, $\rho(x)$ 表示内部质量密度分布, $\phi(x)$ 表示在表面测得的势能。

2 基本解

设 $u \in C^m(\Omega)$, 定义

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

若 u 满足 $\Delta u = 0$, 则称 u 为调和函数。

寻找径向解

$$\Gamma(x) = u(r), \quad r = |x|.$$

则

$$\Delta u = u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0.$$

事实上,

$$r = |x|, \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r},$$

并且

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = u'(r) \frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ &= u''(r) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^2} + u'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{r^3} \right) \\ &= u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r). \end{aligned}$$

乘以 r^{n-1} , 得到

$$(r^{n-1} u'(r))' = 0.$$

于是

$$u'(r) = C r^{1-n}.$$

当 $n \geq 3$ 时, 积分得到

$$u(r) = A r^{2-n} + B.$$

设 u 在无穷远处趋于 0, 取 $B = 0$ 。再作归一化

$$1 = - \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

直接计算得

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial n} dS &= -A(2-n) \int_{\partial B_r} r^{1-n} dS \\ &= (n-2)A |\mathbb{S}^{n-1}|. \end{aligned}$$

因此

$$A = \frac{1}{(n-2)\omega_n}, \quad \omega_n := |\mathbb{S}^{n-1}|.$$

所以 $-\Delta$ 的基本解为

$$\Gamma_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

3 Dirichlet Green 函数与表示公式

定义. 固定 $x \in \Omega$ 。若 $G(x, \cdot)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y), & y \in \Omega, \\ G(x, y) = 0, & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则称 G 为 Ω 的 Dirichlet Green 函数。它可写成

$$G(x, y) = \Gamma_n(x - y) - H_x(y),$$

其中 H_x 关于 y 调和, 并且在边界上等于 $\Gamma_n(x - y)$ 。

例 3 (球域的 Green 函数). 当 $x \neq 0$ 时, 令

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

则

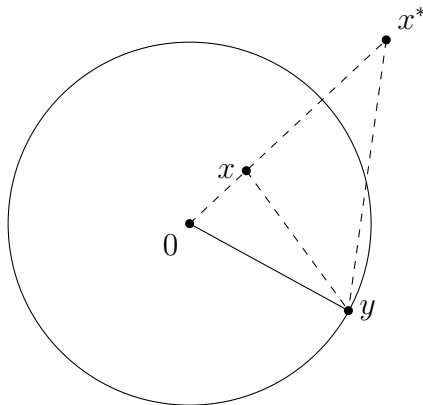
$$G_R(x, y) = \Gamma_n(x - y) - \Gamma_n\left(\frac{|x|}{R}(x^* - y)\right).$$

因为

$$\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|},$$

由两个三角形相似可得, 在 $y \in \partial B_R$ 时,

$$\frac{|y - x|}{|x^* - y|} = \frac{|x|}{R}.$$



定理 1 (Green 表示公式). 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = g, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

则

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \, dS_y.$$

证明. 由第一次 Green 恒等式,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx.$$

从而得到第二次 Green 恒等式

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS.$$

在

$$\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}(x)}$$

上取 $v = G(x, \cdot)$, 应用第二次 Green 恒等式。由于 $G = 0$ 于 $\partial\Omega$, 且 $\Delta_y G = 0$ 于 Ω_{ε} , 有

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{\varepsilon}} G(x, y) \Delta_y u \, dy &= \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \, dS_y \\ &\quad - \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} \left(u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) \, dS_y. \end{aligned} \quad (*)$$

在 $\partial B_{\varepsilon}(x)$ 上,

$$G(x, y) = \Gamma_n(x - y) + O(1) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \varepsilon^{2-n} + O(1),$$

并且

$$-\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = \frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n} + O(1).$$

因此

$$- \int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \, dS_y \longrightarrow u(x),$$

而

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(x)} G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n_y} \, dS_y \longrightarrow 0.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 再利用 $-\Delta u = f$ 以及 $u = g$ 于 $\partial\Omega$, 即得

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \, dS_y.$$

□

推论 1 (Poisson 积分公式). 设 $g \in C(\partial B_R)$ 。Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_R, \\ u = g, & \text{on } \partial B_R \end{cases}$$

的唯一解为

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS_y.$$

证明. 代入 $B_R(0)$ 上的 Green 函数。记

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

由 Green 表示公式,

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial B_R} g(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} \Gamma_n(x - y) - \frac{\partial}{\partial n_y} \Gamma_n \left(\frac{|x|}{R} (x^* - y) \right) \right) dS_y \\ &= - \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_R} g(y) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_i} |x - y|^{2-n} \frac{y_i}{|y|} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{|x|^{2-n}}{R^{2-n}} |x^* - y|^{2-n} \right) \frac{y_i}{|y|} \right) dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_R} g(y) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - x_i}{|y - x|^n} \frac{y_i}{|y|} - \frac{|x|^{2-n}}{R^{2-n}} \frac{y_i - x_i^*}{|y - x^*|^n} \frac{y_i}{|y|} \right) dS_y. \end{aligned}$$

在 ∂B_R 上,

$$|x - y| = \frac{|x|}{R} |x^* - y|.$$

再用 $x^* = R^2 x / |x|^2$, 得到

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_R} g(y) \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i^2 - x_i y_i}{|y - x|^n |y|} - \frac{|x|^2}{R^2} \frac{y_i^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x_i y_i}{|y - x|^n |y|} \right) dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|y - x|^n} \left[|y|^2 - x \cdot y - \frac{|x|^2}{R^2} \left(|y|^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x \cdot y \right) \right] dS_y \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|y - x|^n} dS_y. \end{aligned}$$

□

作业

1. 证明 Green 函数的对称性:

$$G(x, z) = G(z, x).$$

2. 求上半空间的 Green 函数。

第二讲：调和函数的均值性质、最大值原理与光滑性

2026 年 8 月 2 日

记号. 记

$$\omega_n = |\mathbb{S}^{n-1}|, \quad |B_R| = \frac{\omega_n}{n} R^n.$$

以下用 f 表示平均积分。

回忆：Poisson 公式与均值公式

设 $\Delta u = 0$ 于 Ω 中, 且 $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ 。由 Poisson 公式,

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} dS_y.$$

令 $x = x_0$, 得到球面平均值公式

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y = \oint_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS_y. \quad (\text{MVP}_1)$$

再对半径从 0 到 R 积分:

$$\begin{aligned} \int_0^R \omega_n r^{n-1} u(x_0) dr &= \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dS_y dr, \\ \frac{\omega_n}{n} R^n u(x_0) &= \int_{B_R(x_0)} u(y) dy. \end{aligned}$$

因此

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy = \oint_{B_R(x_0)} u(y) dy. \quad (\text{MVP}_2)$$

2.1 均值性质

定理 2.1 (均值性质与调和性的等价性) 设 $u \in C(\Omega)$ 。则下列条件等价:

- (i) $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$;
- (ii) 对任意满足 $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ 的球,

$$u(x) = \oint_{\partial B_R(x)} u(y) dS_y;$$

(iii) 对任意满足 $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ 的球,

$$u(x) = \oint_{B_R(x)} u(y) \, dy.$$

证明. 先证 (i) $\Rightarrow$ (ii)。第一种方法直接使用 Poisson 公式。下面给出第二种方法。令

$$M(r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + r\theta) \, dS_\theta.$$

则

$$\begin{aligned} M'(r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x + r\theta) \theta_i \, dS_\theta \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) \, dy. \end{aligned}$$

若 $\Delta u \geq 0$, 则 $M'(r) \geq 0$, 从而

$$u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} M(r) \leq M(R) = \oint_{\partial B_R(x)} u(y) \, dS_y.$$

类似地, 若 $\Delta u \leq 0$, 则

$$u(x) \geq \oint_{\partial B_R(x)} u(y) \, dS_y.$$

故当 $\Delta u = 0$ 时, 球面平均值公式成立。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 只需将球面平均值公式对半径积分, 正如本讲开始处的计算。

最后证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。取标准磨光核 η_ε , 满足

$$\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0), \quad \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(x) \, dx = 1.$$

可取

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

其中 $C > 0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, dx = 1$ 。

若 $\text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$, 则 $u * \eta_\varepsilon$ 光滑, 并且由球体平均值性质,

$$\begin{aligned} (u * \eta_\varepsilon)(x) &= \int u(y) \eta_\varepsilon(x - y) \, dy = \int_{|y| \leq \varepsilon} u(x + y) \eta_\varepsilon(y) \, dy \\ &= \int_0^\varepsilon r^{n-1} \eta_\varepsilon(r) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + r\theta) \, dS_\theta \, dr \\ &= \int_0^\varepsilon r^{n-1} \eta_\varepsilon(r) \, dr \, \omega_n u(x) \\ &= \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \, dy \right) u(x) = u(x). \end{aligned}$$

因此 u 本身光滑。又对任意 $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy &= \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y \\ &= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + r\theta) dS_\theta \\ &= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_n u(x)) = 0. \end{aligned}$$

于是

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0.$$

□

2.2 极大值原理与唯一性

定理 2.2 (强极大值原理) 设 Ω 连通, $u \in C(\Omega)$, 并满足次均值不等式

$$u(x) \leq \oint_{\partial B_r(x)} u dS \quad \text{对每个 } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

若 u 在 Ω 内达到最大值, 则 u 为常数。

证明. 令

$$M = \sup_{\Omega} u, \quad E = \{x \in \Omega : u(x) = M\}.$$

由连续性, E 在 Ω 中相对闭。若 $x \in E$ 且 $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, 则

$$M = u(x) \leq \oint_{\partial B_r(x)} u dS \leq M.$$

所以 $u = M$ 于 $\partial B_r(x)$ 。对每个 $0 < s < r$ 重复同一论证, 得到 $u = M$ 于 $B_r(x)$ 。故 E 也是开集。由于 Ω 连通且 E 非空, 必有 $E = \Omega$ 。□

推论 2.3 (弱极大值原理) 若 Ω 有界, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 且 $\Delta u = 0$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

若最大值或最小值在内点取得, 则由强极大值原理, u 为常数。



推论 2.4 (Dirichlet 问题的唯一性) 若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 均调和, 且 $u = v$ 于 $\partial\Omega$, 则 $u = v$ 于 Ω 。

2.3 内估计、Liouville 定理与光滑性

定理 2.5 (梯度内估计) 若 u 在 $B_r(x_0)$ 中调和, 则

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C_n}{r} \sup_{B_r(x_0)} |u|.$$

证明. 由球体平均值性质,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(y) dy = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(0)} u(x_0 + z) dz.$$

对 $x_{0,i}$ 求导, 再用散度定理, 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) dy \\ &= \frac{1}{|B_r|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \nu_i(y) dS_y. \end{aligned}$$

故

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \frac{|\partial B_r|}{|B_r|} \sup_{B_r(x_0)} |u| = \frac{n}{r} \sup_{B_r(x_0)} |u|.$$

于是得到所述梯度估计。 $\square$

定理 2.6 (Liouville 定理) 若 u 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上调和, 并且有上界或有下界, 则 u 为常数。

证明. 只证有下界的情形。令

$$m = \inf_{\mathbb{R}^n} u, \quad v = u - m \geq 0.$$

任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, 记 $d = |x_1 - x_2|$ 。由于

$$B_r(x_1) \subset B_{r+d}(x_2),$$

由球体平均值性质,

$$\begin{aligned} v(x_1) &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_1)} v \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{r+d}(x_2)} v \\ &= \frac{|B_{r+d}|}{|B_r|} v(x_2) = \left(\frac{r+d}{r} \right)^n v(x_2). \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow \infty$, 得到 $v(x_1) \leq v(x_2)$ 。交换两点可知 $v(x_1) = v(x_2)$, 故 v 以及 u 均为常数。 $\square$

定理 2.7 (调和函数列的紧性) 设 $\{u_k\}$ 是 Ω 上的调和函数列, 并且局部一致有界, 即对每个 $K \Subset \Omega$,

$$\sup_k \|u_k\|_{L^\infty(K)} < \infty.$$

则存在一个子列, 在 Ω 的每个紧子集上一致收敛到一个调和函数。

证明. 取紧致集穷竭

$$K_1 \Subset \text{int } K_2 \Subset \text{int } K_3 \Subset \cdots \Subset \Omega, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega,$$

并令

$$d_j = \text{dist}(K_j, \partial K_{j+1}) > 0.$$

在以 K_j 中各点为中心、半径 $d_j/2$ 的球上使用一阶内估计，并用 K_{j+1} 上的统一 L^∞ 界控制右端，可知 $\{u_k\}$ 在 K_j 上等度连续。由 Arzelà–Ascoli 定理和对角线法，可取一个子列局部一致收敛到连续函数 u 。

对任意 $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ ，由球体平均值性质及局部一致收敛，

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \oint_{B_r(x)} u(y) \, dy.$$

所以 u 满足球体平均值性质。由定理 2.1， u 调和。 $\square$

2.4 次调和函数

定义 2.8 连续函数 $v \in C(\Omega)$ 称为次调和函数，若对每个球 $B \Subset \Omega$ 以及每个

$$h \in C(\overline{B}) \cap C^2(B), \quad \Delta h = 0 \text{ 于 } B,$$

只要 $v \leq h$ 于 ∂B ，就有 $v \leq h$ 于 B 。若 $-v$ 次调和，则称 v 为超调和函数。

取边值 $v|_{\partial B_r(x)}$ 的 Poisson 延拓 h 。由次调和性，

$$v(x) \leq h(x) = \oint_{\partial B_r(x)} v \, dS, \quad \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \quad (\text{次平均不等式})$$

当 $v \in C^2(\Omega)$ 时，

$$v \text{ 次调和} \iff \Delta v \geq 0.$$

确实，若 $\Delta v \geq 0$ ，且 h 如定义所述，则 $v - h$ 满足

$$\Delta(v - h) \geq 0 \text{ 于 } B, \quad v - h \leq 0 \text{ 于 } \partial B.$$

由极大值原理， $v - h$ 不可能在球内取得正的最大值，因此 $v \leq h$ 于 B 。

反过来，若 v 次调和，则由次平均不等式，

$$0 \leq \oint_{\partial B_r(x)} v \, dS - v(x).$$

将球面平均在 $r = 0$ 处展开：

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v(x + r\theta) \, dS_\theta = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(v(x) + r \sum_i v_i(x) \theta_i + \frac{r^2}{2} \sum_{i,j} v_{ij}(x) \theta_i \theta_j + o(r^2) \right) dS_\theta.$$

由对称性，

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta_i \, dS_\theta = 0, \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \theta_i \theta_j \, dS_\theta = \frac{\delta_{ij}}{n} \omega_n.$$

因此

$$\oint_{\partial B_r(x)} v \, dS - v(x) = \frac{r^2}{2n} \Delta v(x) + o(r^2).$$

结合左端非负，令 $r \rightarrow 0$ ，得到 $\Delta v(x) \geq 0$ 。

第三讲：Perron 方法

2026 年 8 月

基本设定. 本讲中, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 始终表示有界区域, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ 。所谓区域是指连通开集。若 $B \Subset \Omega$, 则 B 表示闭包紧含于 Ω 的球。

3.1 次调和函数

定义 (次调和函数). 设 $v \in C(\Omega)$ 。若对任意球 $B \Subset \Omega$ 以及任意 $h \in C(\overline{B}) \cap C^2(B)$, 只要

$$\Delta h = 0 \quad \text{在 } B, \quad v \leq h \quad \text{在 } \partial B,$$

就有

$$v \leq h \quad \text{在 } B,$$

则称 v 在 Ω 中是**次调和函数**。若 $-v$ 是次调和函数, 则称 v 是**超调和函数**。

当 $v \in C^2(\Omega)$ 时, 上述定义等价于 $\Delta v \geq 0$; 相应地, 超调和等价于 $\Delta v \leq 0$ 。

引理 3.1 (次调和函数的基本性质). 设 $v, w \in C(\Omega)$ 都是次调和函数, 则有:

- (1) $v + w$ 是次调和函数; 对任意 $a \geq 0$, av 也是次调和函数。
- (2) $\max\{v, w\}$ 是次调和函数。
- (3) 若 $v + w$ 在 Ω 中有上界, 并且

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \xi} (v + w)(x) \leq 0, \quad \xi \in \partial\Omega,$$

则 $v + w \leq 0$ 于 Ω 。

- (4) 设 $D \Subset \Omega$ 是开集, q 在 D 中次调和, 并且

$$\limsup_{D \ni x \rightarrow \xi} q(x) \leq v(\xi), \quad \xi \in \partial D.$$

定义

$$V(x) = \begin{cases} \max\{v(x), q(x)\}, & x \in D, \\ v(x), & x \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

则 $V \in C(\Omega)$, 并且 V 是次调和函数。

证明. **(1) 和函数.** 取任意球 $B \Subset \Omega$, 设 h 在 B 中调和, 并且 $v + w \leq h$ 于 ∂B . 令 h_v 是球 B 上边值为 v 的调和函数, 即

$$\Delta h_v = 0 \quad \text{在 } B, \quad h_v = v \quad \text{在 } \partial B.$$

由于 v 次调和, $v \leq h_v$ 于 B . 在 ∂B 上,

$$w \leq h - v = h - h_v.$$

函数 $h - h_v$ 调和, 而 w 次调和, 故 $w \leq h - h_v$ 于 B . 因此

$$v + w \leq h_v + w \leq h \quad \text{在 } B.$$

这就证明了 $v + w$ 次调和. av 的结论直接由定义得到.

(2) 若 $\max\{v, w\} \leq h$ 于 ∂B , 则分别有 $v \leq h$ 和 $w \leq h$ 于 ∂B . 由次调和性, 二者在 B 中仍成立, 所以 $\max\{v, w\} \leq h$ 于 B .

(3) 记 $s = v + w$. 由 (1), s 次调和. 反设 $A := \sup_{\Omega} s > 0$. 由边界上的 $\limsup$ 条件和 $\partial\Omega$ 的紧性, 可以找到紧集 $K \Subset \Omega$, 使得

$$s(x) < \frac{A}{2} \quad (x \in \Omega \setminus K).$$

于是 s 在 K 上取得其正的最大值 A . 次调和函数的强极值原理说明, s 必须在 Ω 中为常数, 这与边界上的 $\limsup s \leq 0$ 矛盾. 因此 $s \leq 0$.

(4) 先说明连续性. 对任意 $\xi \in \partial D$, 因为 $V \geq v$, 且

$$\limsup_{D \ni x \rightarrow \xi} V(x) \leq \max \left\{ v(\xi), \limsup_{D \ni x \rightarrow \xi} q(x) \right\} \leq v(\xi),$$

所以 $V(x) \rightarrow v(\xi)$. 故 $V \in C(\Omega)$.

下面验证次调和性. 取球 $B \Subset \Omega$ 和调和函数 h , 假设 $V \leq h$ 于 ∂B . 由于 $v \leq V$ 于 ∂B , 由 v 的次调和性可得 $v \leq h$ 于 B .

考虑 $G = B \cap D$ 的任一连通分支. 在 $\partial B \cap D$ 上, $q \leq V \leq h$; 在 $B \cap \partial D$ 上,

$$\limsup_{D \ni x \rightarrow \xi} q(x) \leq v(\xi) \leq h(\xi).$$

因此 $q - h$ 在 G 中是有上界的次调和函数, 并且在 ∂G 上的上极限不超过零. 由 (3), $q \leq h$ 于 G . 结合 $v \leq h$, 得到 $V = \max\{v, q\} \leq h$ 于 $B \cap D$; 在 $B \setminus D$ 中, $V = v \leq h$. 故 $V \leq h$ 于整个 B , 从而 V 次调和. $\square$

3.2 Perron 类与调和提升

定义 3.2 (Perron 类). 给定 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 定义

$$\mathcal{S}_{\varphi} := \left\{ v \in C(\Omega) : \begin{array}{l} v \text{ 在 } \Omega \text{ 中次调和且有上界,} \\ \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \xi} v(x) \leq \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega \end{array} \right\}.$$

Perron 函数定义为

$$u(x) := \sup_{v \in \mathcal{S}_{\varphi}} v(x), \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

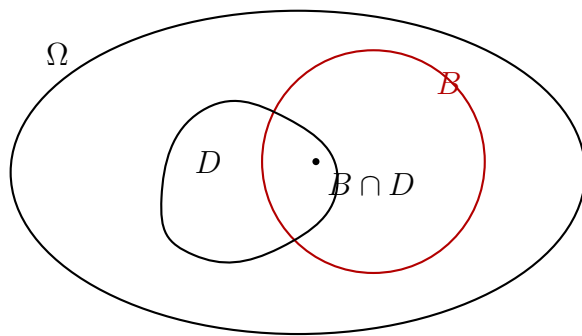


图 1: 拼接引理中的区域关系。比较 q 与 h 时, 需要分别检查 $\partial B \cap D$ 和 $B \cap \partial D$ 上的边界上极限。

引理 3.3 (Perron 函数的有界性). 令

$$m := \min_{\partial\Omega} \varphi, \quad M := \max_{\partial\Omega} \varphi.$$

则 $\mathcal{S}_\varphi \neq \emptyset$, 并且

$$m \leq u(x) \leq M, \quad x \in \Omega.$$

特别地, (1) 定义了一个有限实值函数。

证明. 常函数 m 是次调和函数, 并且 $m \leq \varphi$ 于 $\partial\Omega$, 故 $m \in \mathcal{S}_\varphi$, 从而 $u \geq m$ 。

另一方面, 任取 $v \in \mathcal{S}_\varphi$ 。函数 $v - M$ 次调和、有上界, 并且

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \xi} (v - M)(x) \leq \varphi(\xi) - M \leq 0.$$

由引理 3.1(3), $v \leq M$ 于 Ω 。再对 $v \in \mathcal{S}_\varphi$ 取上确界, 得到 $u \leq M$ 。 $\square$

定义 3.4 (调和提升). 设 v 在 Ω 中次调和, $B = B_r(x_0) \Subset \Omega$ 。令 H_v^B 是球 B 上的 Dirichlet 问题

$$\Delta H_v^B = 0 \quad \text{在 } B, \quad H_v^B = v \quad \text{在 } \partial B$$

的 Poisson 解。定义

$$v^B(x) := \begin{cases} H_v^B(x), & x \in B, \\ v(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

称 v^B 为 v 在球 B 上的**调和提升**。

引理 3.5 (调和提升的性质). 设 $v \in \mathcal{S}_\varphi$, $B \Subset \Omega$ 是球, 则:

- (1) $v^B \in C(\Omega)$;
- (2) v^B 在 Ω 中次调和;
- (3) $v^B \geq v$ 于 Ω ;
- (4) $v^B \in \mathcal{S}_\varphi$ 。

证明. 由于 $H_v^B = v$ 于 ∂B , 分片定义在 ∂B 两侧相容, 所以 $v^B \in C(\Omega)$.

由 v 的次调和性以及 $H_v^B = v$ 于 ∂B , 有 $v \leq H_v^B$ 于 B , 这给出 (3)。把引理 3.1(4) 用于 $D = B$ 、 $q = H_v^B$, 便得到 v^B 次调和, 即 (2)。

最后, $B \Subset \Omega$, 所以 v^B 在 $\partial\Omega$ 附近与 v 完全相同, 边界上极限条件不变。同时, 由调和函数的最大值原理, H_v^B 的上界由 $v|_{\partial B}$ 的上界控制, 故 v^B 仍有上界。因此 $v^B \in \mathcal{S}_\varphi$ 。□

3.3 Perron 函数在内部调和

定理 3.6 (Perron 函数的内部调和性). 由 (1) 定义的 Perron 函数 u 在 Ω 中调和。

证明. 固定 $x_0 \in \Omega$, 取球 $B = B_r(x_0) \Subset \Omega$ 。我们证明 u 在 B 中调和。

第一步: 选取在 x_0 处逼近上确界的序列。 由 $u(x_0)$ 的定义, 可以选取 $v_j \in \mathcal{S}_\varphi$, 使得

$$v_j(x_0) \longrightarrow u(x_0).$$

令

$$\tilde{v}_j := \max\{v_j, m\}, \quad m = \min_{\partial\Omega} \varphi.$$

由引理 3.1(2), $\tilde{v}_j \in \mathcal{S}_\varphi$, 并且仍有 $\tilde{v}_j(x_0) \rightarrow u(x_0)$ 。此外

$$m \leq \tilde{v}_j \leq u \leq M.$$

第二步: 在 B 上作调和提升。 令

$$h_j := \tilde{v}_j^B.$$

由引理 3.5, $h_j \in \mathcal{S}_\varphi$, 且 $h_j \geq \tilde{v}_j$ 。因此

$$\tilde{v}_j(x_0) \leq h_j(x_0) \leq u(x_0),$$

从而

$$h_j(x_0) \longrightarrow u(x_0). \quad (2)$$

同时, h_j 在 B 中调和, 并且 $m \leq h_j \leq M$ 。

第三步: 取调和极限。 由调和函数列紧性, 取一子列 (仍记为 h_j), 使得

$$h_j \longrightarrow V \quad \text{在 } B \text{ 的紧子集上一致收敛,}$$

其中 V 在 B 中调和。因为 $h_j \in \mathcal{S}_\varphi$, 所以 $h_j \leq u$; 令 $j \rightarrow \infty$ 得

$$V \leq u \quad \text{在 } B.$$

由 (2),

$$V(x_0) = u(x_0). \quad (3)$$

第四步: 证明 $V = u$ 于 B 。 反设存在 $z \in B$ 使得 $V(z) < u(z)$ 。由 $u(z)$ 是 $\mathcal{S}_\varphi$ 中函数值的上确界, 可以找到 $q \in \mathcal{S}_\varphi$, 使得

$$V(z) < q(z) \leq u(z). \quad (4)$$

定义

$$g_j := \max\{q, h_j\}.$$

由引理 3.1(2), $g_j \in \mathcal{S}_\varphi$ 。再令

$$k_j := g_j^B$$

为 g_j 在 B 上的调和提升。由引理 3.5,

$$k_j \in \mathcal{S}_\varphi, \quad k_j \geq g_j \geq h_j \quad \text{在 } B.$$

函数列 $\{k_j\}$ 在 B 中调和, 并且仍满足 $m \leq k_j \leq M$ 。再取一子列, 使 $k_j \rightarrow W$ 在 B 的紧子集上一致收敛, 其中 W 调和。由 $k_j \geq h_j$ 得 $W \geq V$ 。另一方面,

$$u(x_0) \geq k_j(x_0) \geq h_j(x_0) \rightarrow u(x_0),$$

所以结合 (3),

$$W(x_0) = V(x_0).$$

于是 $W - V$ 是 B 中非负的调和函数, 并在内点 x_0 取到最小值零。由强极值原理,

$$W \equiv V \quad \text{在 } B. \quad (5)$$

然而, 由 $h_j(z) \rightarrow V(z) < q(z)$, 当 j 足够大时, $g_j(z) = q(z)$, 故

$$k_j(z) \geq g_j(z) = q(z).$$

令 $j \rightarrow \infty$, 得到

$$W(z) \geq q(z) > V(z),$$

这与 (5) 矛盾。因此 $V = u$ 于 B , 从而 u 在 B 中调和。由于 x_0 任意, u 在整个 Ω 中调和。□

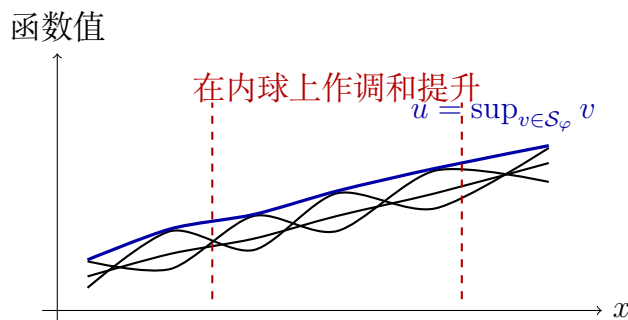


图 2: Perron 方法的示意: 取次调和候选函数的上包络, 并在内球上反复作调和提升。

3.4 屏障函数与边界取值

内部调和性本身并不能保证 Perron 函数在边界上取得给定值。边界正则性由屏障函数控制。

定义 3.7 (屏障函数). 设 $\xi \in \partial\Omega$ 。若存在 $w_\xi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 满足

$$\Delta w_\xi \leq 0 \quad \text{在 } \Omega, \quad w_\xi(\xi) = 0, \quad w_\xi(x) > 0 \quad (x \in \bar{\Omega} \setminus \{\xi\}),$$

则称 w_ξ 是 Ω 在边界点 ξ 处的**屏障函数**。

定理 3.8 (边界连续性与 Dirichlet 问题的可解性). 假设 $\partial\Omega$ 的每一点都存在屏障函数, 并且 $\varphi \in C(\partial\Omega)$ 。令 u 为 Perron 函数。则

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow \xi} u(x) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \partial\Omega.$$

因此, 把 u 在边界上定义为 $u = \varphi$, 便有 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$, 并且它是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的唯一解。

证明. 固定 $\xi \in \partial\Omega$ 和 $\varepsilon > 0$ 。由 φ 在 $\partial\Omega$ 上连续, 可取并在必要时缩小 $\delta > 0$ (使 $F_\delta \neq \emptyset$), 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega, \quad |x - \xi| < \delta. \quad (6)$$

令

$$N_\delta := \{x \in \partial\Omega : |x - \xi| < \delta\}, \quad F_\delta := \partial\Omega \setminus N_\delta.$$

取 ξ 处的屏障函数 $w = w_\xi$ 。由于 F_δ 是不含 ξ 的紧集,

$$m_\delta := \min_{x \in F_\delta} w(x) > 0.$$

再记

$$M := \max_{\partial\Omega} |\varphi|, \quad A := \frac{2(M + \varepsilon)}{m_\delta} > 0,$$

并定义

$$\bar{u}_\varepsilon(x) := \varphi(\xi) + \varepsilon + Aw(x), \quad \underline{u}_\varepsilon(x) := \varphi(\xi) - \varepsilon - Aw(x). \quad (7)$$

因为 $\Delta w \leq 0$, 所以 $\bar{u}_\varepsilon$ 超调和, $\underline{u}_\varepsilon$ 次调和。

先检查边界不等式。若 $x \in N_\delta$, 由 (6),

$$\bar{u}_\varepsilon(x) \geq \varphi(\xi) + \varepsilon \geq \varphi(x), \quad \underline{u}_\varepsilon(x) \leq \varphi(\xi) - \varepsilon \leq \varphi(x).$$

若 $x \in F_\delta$, 则 $Aw(x) \geq 2(M + \varepsilon)$, 从而

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varepsilon(x) &\geq -M + \varepsilon + 2(M + \varepsilon) = M + 3\varepsilon \geq \varphi(x), \\ \underline{u}_\varepsilon(x) &\leq M - \varepsilon - 2(M + \varepsilon) = -M - 3\varepsilon \leq \varphi(x). \end{aligned}$$

故在整个 $\partial\Omega$ 上,

$$\underline{u}_\varepsilon \leq \varphi \leq \bar{u}_\varepsilon. \quad (8)$$

由 (8), $\underline{u}_\varepsilon$ 属于 $\mathcal{S}_\varphi$, 所以

$$\underline{u}_\varepsilon \leq u \quad \text{在 } \Omega. \quad (9)$$

下面证明 $u \leq \bar{u}_\varepsilon$ 。任取 $v \in \mathcal{S}_\varphi$ 。由于 $-\bar{u}_\varepsilon$ 次调和, 引理 3.1(1) 表明 $v - \bar{u}_\varepsilon$ 次调和; 它有上界, 并且由 (8),

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} (v(x) - \bar{u}_\varepsilon(x)) \leq \varphi(x_0) - \bar{u}_\varepsilon(x_0) \leq 0, \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

由引理 3.1(3), $v \leq \bar{u}_\varepsilon$ 于 Ω 。对所有 $v \in \mathcal{S}_\varphi$ 取上确界, 得到

$$u \leq \bar{u}_\varepsilon \quad \text{在 } \Omega. \quad (10)$$

综合 (9) 和 (10),

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - Aw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + Aw(x).$$

令 $\Omega \ni x \rightarrow \xi$ 。由 $w(x) \rightarrow w(\xi) = 0$,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow \xi} u(x) \leq \limsup_{x \rightarrow \xi} u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon.$$

再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 即得 $\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = \varphi(\xi)$ 。

最后, 内部调和性来自定理 3.6。若 u_1, u_2 是两个连续到边界的解, 则 $u_1 - u_2$ 调和且在边界为零; 由最大值原理, $u_1 - u_2 \equiv 0$ 。故解唯一。 $\square$

第四讲：Wiener 准则的充分性

2026 年 8 月

基本设定. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界区域, $x_0 \in \partial\Omega$. 平移后可设 $x_0 = 0$. 本讲只证明 Wiener 准则的充分性。

4.1 容量和平衡势

定义 4.1 (Newton 容量). 对紧集 $K \subset \mathbb{R}^3$, 定义

$$\text{cap}(K) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 dx : \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3), \phi \geq 1 \text{ 于 } K \text{ 的一个邻域} \right\}.$$

若一个性质除去容量为零的集合后成立, 则称它**拟处处**成立。

命题 4.2 (容量的基本性质). 对紧集 $K, L \subset \mathbb{R}^3$ 及 $t > 0$, 有

- (1) 若 $K \subset L$, 则 $\text{cap}(K) \leq \text{cap}(L)$;
- (2) $\text{cap}(x_0 + tK) = t \text{cap}(K)$;
- (3) $\text{cap}(\overline{B_r(x_0)}) = 4\pi r$.

证明. 单调性来自允许测试函数的包含关系。下面证明缩放性质。令

$$\psi(z) = \phi(x_0 + tz), \quad x = x_0 + tz.$$

则

$$|\nabla_z \psi|^2 = t^2 |\nabla_x \phi|^2, \quad dz = t^{-3} dx,$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \psi|^2 dz = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi|^2 dx.$$

取下确界即得 $\text{cap}(x_0 + tK) = t \text{cap}(K)$ 。

最后计算球的容量。考虑外部 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta p = 0, & |x - x_0| > r, \\ p = 1, & |x - x_0| = r, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = 0. \end{cases}$$

径向解为

$$p(x) = \frac{r}{|x - x_0|}, \quad |x - x_0| > r.$$

于是

$$\int_{|x-x_0|>r} \left| \nabla \frac{r}{|x-x_0|} \right|^2 dx = 4\pi r^2 \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = 4\pi r.$$

由标准截断逼近和 Dirichlet 原理，得到

$$\text{cap}(\overline{B_r(x_0)}) = 4\pi r.$$

□

命题 4.3 (平衡测度与平衡势). 对每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^3$ ，存在正测度 μ_K ，称为 K 的平衡测度，使得

$$\mu_K(K) = \text{cap}(K),$$

并且

$$p_K(x) := \frac{1}{4\pi} \int_K \frac{1}{|x-y|} d\mu_K(y)$$

满足

$$0 \leq p_K \leq 1,$$

且 p_K 在 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中调和，在无穷远趋于 0，并且

$$p_K = 1 \quad \text{拟处处于 } K.$$

称 p_K 为 K 的平衡势。

若 $v \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中超调和，在无穷远的下极限非负，并且 $v \geq 1$ 拟处处于 K ，则

$$v \geq p_K.$$

等价地，若 $h \geq 0$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中次调和，在无穷远趋于 0，并且 $h \leq 1$ 拟处处于 K 且在 K 附近有统一上界，则

$$h \leq p_K.$$

注记 4.4. 本讲不展开平衡势和平衡测度的存在性证明，只使用上面的性质。

引理 4.5 (远近估计). 若 $x \notin K$ ，则

$$\frac{\text{cap}(K)}{4\pi \sup_{y \in K} |x-y|} \leq p_K(x) \leq \frac{\text{cap}(K)}{4\pi \text{dist}(x, K)}.$$

证明. 由平衡势的积分表达式和 $\mu_K(K) = \text{cap}(K)$ ，有

$$\frac{1}{\sup_{y \in K} |x-y|} \leq \frac{1}{|x-y|} \leq \frac{1}{\text{dist}(x, K)}.$$

两边对 $d\mu_K(y)$ 积分，即得结论。

□

4.2 局部补集的平衡势推出正则性

对 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 记 u 为相应的 Perron 解。

定义 4.6 (正则边界点). 称 x_0 为正则边界点, 若对每个 $\varphi \in C(\partial\Omega)$ 都有

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0).$$

对 $s > 0$, 记

$$E_s := \Omega^c \cap \overline{B_s(0)}.$$

引理 4.7 (平衡势判据). 若对每个 $s > 0$ 都有

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow 0} p_{E_s}(x) = 1,$$

则 0 是 Ω 的正则边界点。

证明. 固定 $\varphi \in C(\partial\Omega)$, 记

$$M = \max_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

给定 $\varepsilon > 0$. 由 φ 在 0 处连续, 可取 $R > 0$, 使得

$$|\varphi(\xi) - \varphi(0)| < \varepsilon, \quad \xi \in \partial\Omega \cap B_{R/2}(0). \quad (1)$$

令

$$K := E_{R/8}, \quad b := 1 - p_K.$$

函数 b 在 Ω 中非负调和. 若 $|x| \geq R/2$, 则对 $y \in K$ 有

$$|x - y| \geq \frac{3R}{8}, \quad \text{cap}(K) \leq \text{cap}(\overline{B_{R/8}}) = \frac{4\pi R}{8}.$$

由引理 4.5 得

$$p_K(x) \leq \frac{1}{3}, \quad b(x) \geq \frac{2}{3}. \quad (2)$$

定义

$$\overline{w} = \varphi(0) + \varepsilon + 3Mb, \quad \underline{w} = \varphi(0) - \varepsilon - 3Mb.$$

在 $\partial\Omega \cap B_{R/2}(0)$ 上, 由 (1) 有

$$\underline{w} \leq \varphi \leq \overline{w}.$$

在其余边界点上, 由 (2) 及 $|\varphi(0)| \leq M$ 仍有

$$\underline{w} \leq -M \leq \varphi \leq M \leq \overline{w}.$$

由 Perron 比较原理得到

$$\varphi(0) - \varepsilon - 3M(1 - p_K(x)) \leq u(x) \leq \varphi(0) + \varepsilon + 3M(1 - p_K(x)).$$

由于假设 $p_K(x) \rightarrow 1$, 故

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow 0} |u(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow 0} u(x) = \varphi(0).$$

因此 0 是正则边界点。 □

4.3 Wiener 准则的充分性：二进环带的四尺度衰减

这一段把手写稿中任意比例 λ 的证明，改成固定二进环带的证明。令

$$r_k := 2^{-k}, \quad A_k := \Omega^c \cap \{r_{k+1} \leq |x| \leq r_k\}, \quad \gamma_k := \text{cap}(A_k).$$

在三维中 cap 的量纲是长度，所以 Wiener 级数写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \gamma_k.$$

引理 4.8 (二进环带的四尺度衰减). 固定 $r > 0$, 令

$$q(x) := 1 - p_{E_r}(x), \quad E_r = \Omega^c \cap \overline{B_r(0)}.$$

若 $k \geq 2$ 且 $r_{k-2} < r$, 记

$$M_j := \sup_{\Omega \cap B_{r_j}} q.$$

则存在一个绝对常数 $c_0 > 0$, 例如

$$c_0 = \frac{7}{60\pi},$$

使得

$$M_{k+2} \leq (1 - c_0 2^k \gamma_k) M_{k-2}.$$

这里所谓“四尺度”，就是用外球 $B_{r_{k-2}}$ 、中间环带 A_k 和内球 $B_{r_{k+2}}$ 做一次衰减。

证明. 若 $\gamma_k = 0$, 结论显然。下面设 $\gamma_k > 0$ 。令

$$p_k := p_{A_k}, \quad s_k := \sup_{\partial B_{r_{k-2}}} p_k.$$

由远近估计，引理 4.5，在 $\partial B_{r_{k-2}}$ 上有

$$s_k \leq \frac{\gamma_k}{4\pi(r_{k-2} - r_k)} = \frac{\gamma_k}{12\pi r_k}.$$

另一方面，若 $|x| \leq r_{k+2}$ 且 $y \in A_k$, 则

$$|x - y| \leq r_{k+2} + r_k = \frac{5}{4}r_k.$$

所以仍由引理 4.5，得到

$$p_k(x) \geq \frac{\gamma_k}{4\pi(r_k + r_{k+2})} = \frac{\gamma_k}{5\pi r_k}, \quad |x| \leq r_{k+2}. \quad (1)$$

在区域 $\Omega \cap B_{r_{k-2}}$ 中比较 q 与

$$V(x) := M_{k-2} \frac{1 - p_k(x)}{1 - s_k}.$$

因为 $A_k \subset E_r$, 在 A_k 上有 $q = 0$ 拟处处, 而 $p_k = 1$ 拟处处。在 $\partial B_{r_{k-2}}$ 上, 由 $p_k \leq s_k$ 得 $V \geq M_{k-2} \geq q$ 。在其余属于 $\partial\Omega$ 的边界部分上, 由 $r_{k-2} < r$, 这些点都属于 E_r , 故 $q = 0$ 拟处处, 而 $V \geq 0$ 。因此由比较原理,

$$q \leq V \quad \text{in } \Omega \cap B_{r_{k-2}}.$$

于是由 (1) 得, 在 $\Omega \cap B_{r_{k+2}}$ 上

$$q(x) \leq M_{k-2} \frac{1 - \gamma_k/(5\pi r_k)}{1 - \gamma_k/(12\pi r_k)}.$$

注意到 $\gamma_k \leq \text{cap}(\overline{B_{r_k}}) = 4\pi r_k$, 故 $\gamma_k/(12\pi r_k) \leq 1/3$ 。又

$$\frac{1 - \gamma_k/(5\pi r_k)}{1 - \gamma_k/(12\pi r_k)} = 1 - \frac{\gamma_k/(5\pi r_k) - \gamma_k/(12\pi r_k)}{1 - \gamma_k/(12\pi r_k)} \leq 1 - \frac{7\gamma_k}{60\pi r_k}.$$

由于 $r_k = 2^{-k}$, 即得

$$M_{k+2} \leq \left(1 - \frac{7}{60\pi} 2^k \gamma_k\right) M_{k-2}.$$

□

定理 4.9 (Wiener 准则的充分性, 二进形式). 若

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \gamma_k = \infty,$$

则 0 是 Ω 的正则边界点。

证明. 由引理 4.7, 只需证明: 对每个 $r > 0$,

$$p_{E_r}(x) \rightarrow 1, \quad \Omega \ni x \rightarrow 0.$$

固定 $r > 0$, 仍记

$$q = 1 - p_{E_r}, \quad M_j = \sup_{\Omega \cap B_{r_j}} q.$$

则 $0 \leq q \leq 1$, 所以 $0 \leq M_j \leq 1$ 。

由级数发散, 四个子级数中至少有一个发散。也就是说, 存在 $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, 使得

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{j+4i} \gamma_{j+4i} = \infty. \quad (2)$$

取 i_0 充分大, 使得

$$r_{j+4i_0-2} < r.$$

对 $k = j + 4i$ 使用引理 4.8, 得

$$M_{j+4i+2} \leq (1 - c_0 2^{j+4i} \gamma_{j+4i}) M_{j+4i-2}, \quad i \geq i_0.$$

迭代得到

$$M_{j+4N+2} \leq M_{j+4i_0-2} \prod_{i=i_0}^N (1 - c_0 2^{j+4i} \gamma_{j+4i}).$$

又因为

$$2^k \gamma_k \leq 2^k \operatorname{cap}(\overline{B_{2^{-k}}}) = 4\pi,$$

而 $c_0 4\pi = 7/15 < 1$ ，所有因子均为正。由 (2) 和 $\log(1-t) \leq -t$ ，上面的乘积趋于 0。因此

$$M_{j+4N+2} \rightarrow 0.$$

现在令 $x \in \Omega$ 且 $x \rightarrow 0$ 。只要 $|x| < r_{j+4N+2}$ ，就有

$$0 \leq q(x) \leq M_{j+4N+2}.$$

令 $N \rightarrow \infty$ ，得

$$q(x) = 1 - p_{E_r}(x) \rightarrow 0,$$

即

$$p_{E_r}(x) \rightarrow 1, \quad \Omega \ni x \rightarrow 0.$$

由引理 4.7，0 是正则边界点。 □

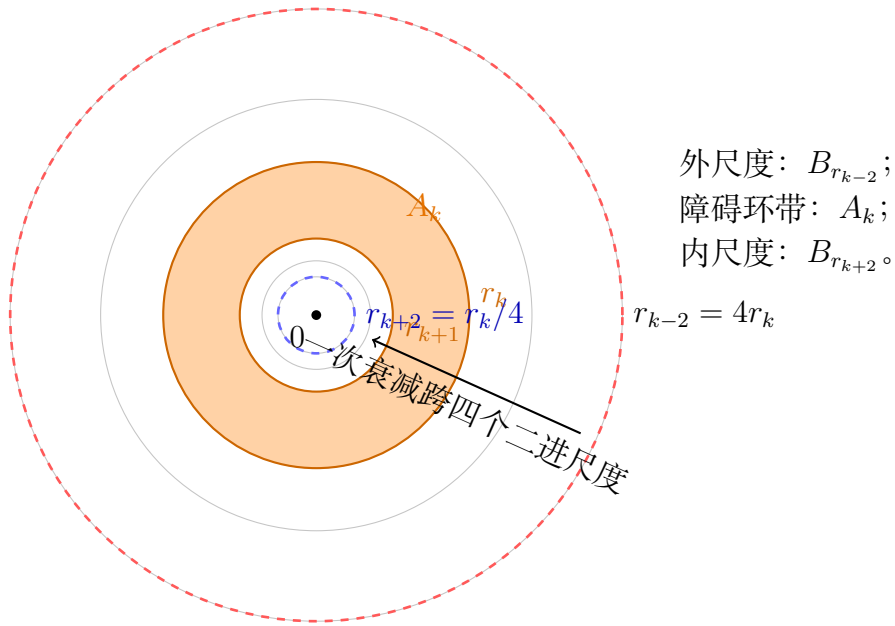


图 1: 二进环带的四尺度衰减。环带 A_k 位于 $r_{k+1} \leq |x| \leq r_k$ ，它使 $1 - p_{E_r}$ 从外球 $B_{r_{k-2}}$ 到内球 $B_{r_{k+2}}$ 衰减一个因子。

第五讲：牛顿位势的二阶估计

2026 年 8 月

5.1 牛顿位势的二阶估计

记

$$\omega_n = |\mathbb{S}^{n-1}|, \quad \Gamma(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n}, \quad n \geq 3.$$

于是

$$-\Delta \Gamma = \delta_0$$

在分布意义下成立。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $f \in L^\infty(\Omega)$, 定义 Newton 位势

$$N(x) = N_f(x) := \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

定义 5.1 (Hölder 半范数). 对 $0 < \alpha \leq 1$ 以及集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 记

$$[f]_{\alpha; E} := \sup_{\substack{x, y \in E \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

若只要求这个估计在 x_0 的一个邻域内成立, 则称 f 在 x_0 处满足 Hölder 条件。

本讲最后的二阶 Hölder 估计取 $0 < \alpha < 1$. 端点 $\alpha = 1$ 一般不能推出 $D^2 N$ 为 Lipschitz 连续; 证明中相应的远区积分会出现 $\delta \log(1/\delta)$ 。

引理 5.2 (核函数的导数与可积性). 对 $z \neq 0$, 有

$$\partial_i \Gamma(z) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{z_i}{|z|^n},$$

以及

$$\partial_{ij} \Gamma(z) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{n z_i z_j}{|z|^{n+2}} - \frac{\delta_{ij}}{|z|^n} \right).$$

因此

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &\leq C_n |z|^{2-n}, & |\nabla \Gamma(z)| &\leq C_n |z|^{1-n}, \\ |D^2 \Gamma(z)| &\leq C_n |z|^{-n}, & |D^3 \Gamma(z)| &\leq C_n |z|^{-n-1}, \end{aligned}$$

并且

$$\Delta \Gamma = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

特别地, Γ 和 $\nabla \Gamma$ 局部可积, 而 $D^2 \Gamma$ 的奇性恰好处于临界阶 $|z|^{-n}$, 不能绝对积分。

证明. 前两个公式由直接求导得到, 其余估计随即成立。又对 $\beta < n$,

$$\int_{B_R} |z|^{-\beta} dz = \omega_n \int_0^R r^{n-1-\beta} dr = \frac{\omega_n}{n-\beta} R^{n-\beta} < \infty.$$

取 $\beta = n - 2$ 和 $\beta = n - 1$ 即得 Γ 与 $\nabla\Gamma$ 的局部可积性。又由二阶导数的显式公式,

$$\sum_{i,j=1}^n |\partial_{ij}\Gamma(z)|^2 = \frac{n(n-1)}{\omega_n^2} |z|^{-2n}.$$

因此 $D^2\Gamma$ 的大小恰好与 $|z|^{-n}$ 同阶, 而当 $\beta = n$ 时径向积分为 $\int_0^R r^{-1} dr = \infty$, 故 $D^2\Gamma$ 不绝对可积。□

定理 5.3 (位势和力场). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $f \in L^\infty(\Omega)$ 。则

$$N \in C^1(\mathbb{R}^n),$$

并且

$$\nabla N(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} f(y) \frac{y-x}{|y-x|^n} dy.$$

右端是绝对收敛积分。

证明. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $i \in \{1, \dots, n\}$ 。我们证明

$$\frac{\partial N}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega} f(y) \frac{y_i - x_{0,i}}{|y - x_0|^n} dy.$$

固定 $\rho > 0$, 取 $0 < |h| < \rho/2$ 。把差商与候选导数之差按 $B_\rho(x_0)$ 的内外分开:

$$\begin{aligned} & \frac{N(x_0 + he_i) - N(x_0)}{h} - \int_{\Omega} f(y) \partial_i \Gamma(x_0 - y) dy \\ &= \int_{\Omega \setminus B_\rho(x_0)} f(y) \left[\frac{\Gamma(x_0 + he_i - y) - \Gamma(x_0 - y)}{h} - \partial_i \Gamma(x_0 - y) \right] dy \\ &+ \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} f(y) \left[\frac{\Gamma(x_0 + he_i - y) - \Gamma(x_0 - y)}{h} - \partial_i \Gamma(x_0 - y) \right] dy \\ &=: J_1 + J_2. \end{aligned}$$

在远场 $\Omega \setminus B_\rho(x_0)$ 上, 若 $0 \leq t \leq 1$, 则

$$|x_0 + the_i - y| \geq \rho/2.$$

核函数在该区域光滑, 且差商有一个与 h 无关的可积上界。由控制收敛定理,

$$\lim_{h \rightarrow 0} J_1 = 0.$$

在近场中, 对不属于线段 $\{x_0 + the_i : 0 \leq t \leq 1\}$ 的 y , 由微积分基本定理,

$$\frac{\Gamma(x_0 + he_i - y) - \Gamma(x_0 - y)}{h} = \int_0^1 \partial_i \Gamma(x_0 + the_i - y) dt.$$

例外线段是零测集；下述估计表明右端关于 (t, y) 绝对可积，故可在积分中使用这个恒等式。由引理 5.2，并利用 $B_\rho(x_0) \subset B_{3\rho/2}(x_0 + the_i)$ ，有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} \left| \frac{\Gamma(x_0 + he_i - y) - \Gamma(x_0 - y)}{h} \right| dy \\ & \leq \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 \int_{B_\rho(x_0)} |x_0 + the_i - y|^{1-n} dy dt \leq \frac{3\rho}{2}. \end{aligned}$$

另一方面，

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\partial_i \Gamma(x_0 - y)| dy \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{B_\rho(x_0)} |x_0 - y|^{1-n} dy = \rho.$$

故

$$|J_2| \leq \frac{5}{2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \rho.$$

先令 $h \rightarrow 0$ ，再令 $\rho \rightarrow 0$ ，即得偏导数公式。由于 $|y - x|^{1-n}$ 局部可积，右端绝对收敛。

下面证明 ∇N 连续。固定 x_0 ，取 $|x - x_0| < \rho/2$ ，并把积分分为 $\Omega \cap B_\rho(x_0)$ 与其补集。在近场，

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} |f(y)| (|x - y|^{1-n} + |x_0 - y|^{1-n}) dy \leq 3\rho \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

在远场，对向量函数 $(y - x)/|y - x|^n$ 使用中值定理。若 z 位于 x 与 x_0 的线段上，则 $|y - z| \geq \rho/2$ ，从而

$$\left| \frac{y - x}{|y - x|^n} - \frac{y - x_0}{|y - x_0|^n} \right| \leq C_n \rho^{-n} |x - x_0|.$$

因此

$$|\nabla N(x) - \nabla N(x_0)| \leq 3\rho \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_n \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega| \rho^{-n} |x - x_0|.$$

先令 $x \rightarrow x_0$ ，再令 $\rho \rightarrow 0$ ，得到 $\nabla N(x) \rightarrow \nabla N(x_0)$ 。故 $N \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 。□

引理 5.4 (常密度球的位势). 令

$$W_R(x) := \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{B_R(0)} |x - y|^{2-n} dy.$$

当 $|x| < R$ 时，

$$W_R(x) = \frac{1}{2(n-2)} R^2 - \frac{1}{2n} |x|^2,$$

从而

$$D_{ij} W_R(x) = -\frac{1}{n} \delta_{ij}.$$

证明. 先有

$$W_R(0) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{B_R(0)} |y|^{2-n} dy = \frac{1}{n-2} \int_0^R r dr = \frac{1}{2(n-2)} R^2.$$

令 $r = |x| < R$ ，把球分解成半径为 s 的球壳，并记

$$H_s(r) := \int_{|y|=s} |x - y|^{2-n} dS_y.$$

在 $n = 3$ 时, 取 $x = (0, 0, r)$, 用球坐标 $y = s(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, 则

$$H_s(r) = 2\pi s^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} d\theta = \frac{2\pi s}{r}(r + s - |r - s|).$$

因此当 $r > s$ 时 $H_s(r) = 4\pi s^2/r$, 当 $r < s$ 时 $H_s(r) = 4\pi s$ 。

一般地, 若 $r > s$, 则关于 y 的函数 $|x - y|^{2-n}$ 在 $B_s(0)$ 中调和。由球面平均值公式,

$$H_s(r) = \omega_n s^{n-1} r^{2-n}.$$

若 $r < s$, 则 $H_s(r)$ 作为 x 的函数在 $B_s(0)$ 中是有限的径向调和函数, 故为常数; 在 $x = 0$ 处计算得

$$H_s(r) = H_s(0) = \omega_n s.$$

在 $r = s$ 时, 球面上的奇性仍然可积; 把球面积分分成 y 靠近 x 的小球冠及其补集, 小球冠上的积分随球冠半径趋于零而趋于零, 故 $H_s(r)$ 在 $r = s$ 处连续。因此两式在 $r = s$ 时也成立, 从而

$$H_s(r) = \begin{cases} \omega_n s, & 0 \leq r \leq s, \\ \omega_n s^{n-1} r^{2-n}, & r \geq s. \end{cases}$$

代回 W_R , 当 $r < R$ 时,

$$\begin{aligned} W_R(r) &= \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(\int_0^r \omega_n s^{n-1} r^{2-n} ds + \int_r^R \omega_n s ds \right) \\ &= \frac{1}{n(n-2)} r^2 + \frac{1}{n-2} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2(n-2)} R^2 - \frac{1}{2n} r^2. \end{aligned}$$

对 x_i, x_j 求导即得 $D_{ij}W_R = -\delta_{ij}/n$ 。

□

定理 5.5 (点态二阶导数公式). 设 $B_\rho(x_0) \subset \Omega$, 并且 f 在 x_0 处满足

$$|f(y) - f(x_0)| \leq M|y - x_0|^\alpha, \quad y \in B_\rho(x_0),$$

其中 $\alpha > 0$ 。则 $D_{ij}N(x_0)$ 存在, 而且

$$\begin{aligned} D_{ij}N(x_0) &= \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) D_{ij}\Gamma(x_0 - y) dy - \frac{1}{n} f(x_0) \delta_{ij} \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus B_\rho(x_0)} f(y) D_{ij}\Gamma(x_0 - y) dy. \end{aligned}$$

特别地,

$$\Delta N(x_0) = -f(x_0).$$

证明. 先把位势写成

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) \Gamma(x - y) dy \\ &\quad + f(x_0) \int_{B_\rho(x_0)} \Gamma(x - y) dy + \int_{\Omega \setminus B_\rho(x_0)} f(y) \Gamma(x - y) dy. \end{aligned}$$

第三项在 x_0 的一个邻域中核函数光滑，可以直接求导。由引理 5.4（平移球心后），第二项在 x_0 处的二阶导数为

$$-\frac{1}{n}f(x_0)\delta_{ij}.$$

还需严格说明第一项可以在 x_0 处求两次导数。由定理 5.3，它的一阶导数为

$$\partial_i \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0))\Gamma(x - y) dy = \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0))\partial_i \Gamma(x - y) dy.$$

另一方面，由引理 5.2，

$$\int_{B_\rho(x_0)} |f(y) - f(x_0)| |D^2\Gamma(x_0 - y)| dy \leq C_n M \int_0^\rho r^{\alpha-1} dr < \infty.$$

取 $h \in \mathbb{R}^n$, $0 < |h| < \rho/4$, 把积分区域分成 $B_{2|h|}(x_0)$ 及其补集。在 $B_{2|h|}(x_0)$ 上，由引理 5.2，

$$\begin{aligned} & \int_{B_{2|h|}(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \left(|\partial_i \Gamma(x_0 + h - y)| + |\partial_i \Gamma(x_0 - y)| + |h| |D^2\Gamma(x_0 - y)| \right) dy \\ & \leq C(n, \alpha) M |h|^{\alpha+1} = o(|h|). \end{aligned}$$

这里含 $\partial_i \Gamma(x_0 + h - y)$ 的一项先用 $|f(y) - f(x_0)| \leq M(2|h|)^\alpha$ ，再把积分球心移到 $x_0 + h$ ；最后一项则保留因子 $|y - x_0|^\alpha$ ，利用

$$|h| \int_0^{2|h|} r^{\alpha-1} dr \leq C(\alpha) |h|^{\alpha+1}.$$

在 $B_\rho(x_0) \setminus B_{2|h|}(x_0)$ 上，点 $x_0 + th$ 到 y 的距离至少为 $|y - x_0|/2$ 。Taylor 公式和 $|D^3\Gamma(z)| \leq C_n |z|^{-n-1}$ 给出

$$\left| \partial_i \Gamma(x_0 + h - y) - \partial_i \Gamma(x_0 - y) - \sum_{j=1}^n h_j D_{ij} \Gamma(x_0 - y) \right| \leq C_n |h|^2 |y - x_0|^{-n-1}.$$

乘以 $|f(y) - f(x_0)|$ 后积分，得到

$$C_n M |h|^2 \int_{2|h|}^\rho r^{\alpha-2} dr = o(|h|).$$

事实上，除以 $|h|$ 后，右端在 $0 < \alpha < 1$ 、 $\alpha = 1$ 和 $\alpha > 1$ 时分别由

$$C|h|^\alpha, \quad C|h| \log \frac{\rho}{2|h|}, \quad C|h|$$

控制，因而都趋于零。综上，

$$\begin{aligned} & \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) \partial_i \Gamma(x_0 + h - y) dy \\ & = \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) \partial_i \Gamma(x_0 - y) dy \\ & \quad + \sum_{j=1}^n h_j \int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) D_{ij} \Gamma(x_0 - y) dy + o(|h|). \end{aligned}$$

这说明第一项的一阶导数在 x_0 处可微，其 Hessian 正是

$$\int_{B_\rho(x_0)} (f(y) - f(x_0)) D_{ij} \Gamma(x_0 - y) dy.$$

于是得到所述二阶导数公式。

最后对 $i = j$ 求和。由于上述含差值的积分绝对收敛，并且 $\Delta \Gamma = 0$ 于 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ，近区第一项和远区项取迹后都为零，而

$$-\frac{1}{n} f(x_0) \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = -f(x_0).$$

故 $\Delta N(x_0) = -f(x_0)$ 。 □

定理 5.6 (二阶 Hölder 估计). 设 $f \in C_c^\alpha(B_2)$, $0 < \alpha < 1$, 并把 f 零延拓到 $\mathbb{R}^n$ 。则

$$[D^2 N]_{\alpha; B_1} \leq C(n, \alpha) [f]_{\alpha; \mathbb{R}^n}.$$

这里 $C_c^\alpha(B_2)$ 表示在 B_2 中具有紧支集的 C^α 函数，且 $[D^2 N]_{\alpha; B_1}$ 按各个 $D_{ij} N$ 的 Hölder 半范数取最大值。由于 f 的支集紧含于 B_2 ，它在 ∂B_2 的一个邻域内恒为零，因而零延拓仍属于 $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 。

证明. 固定 $P, P_0 \in B_1$ 。若 $P = P_0$ ，结论显然。以下设

$$\delta = |P - P_0|, \quad \bar{P} = \frac{P + P_0}{2}, \quad A = B_\delta(\bar{P}).$$

由于 $P, P_0 \in B_1$ ，有 $A \subset B_3$ 。又因 $f = 0$ 于 $B_3 \setminus B_2$ ，可以把位势写成 B_3 上的积分。对密度 $f(y) - f(P)$ 应用定理 5.5，再对常密度项应用引理 5.4，得到

$$D_{ij} N(P) = -\frac{1}{n} f(P) \delta_{ij} + \int_{B_3} (f(y) - f(P)) D_{ij} \Gamma(P - y) dy.$$

对 P_0 也有同样的公式。两式相减，并把积分分成 A 与 $B_3 \setminus A$ ，得到

$$D_{ij} N(P) - D_{ij} N(P_0) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{n} (f(P) - f(P_0)) \delta_{ij}, \\ I_2 &= \int_A (f(y) - f(P)) D_{ij} \Gamma(P - y) dy, \\ I_3 &= -\int_A (f(y) - f(P_0)) D_{ij} \Gamma(P_0 - y) dy, \\ I_4 &= (f(P_0) - f(P)) \int_{B_3 \setminus A} D_{ij} \Gamma(P - y) dy, \\ I_5 &= \int_{B_3 \setminus A} (f(y) - f(P_0)) (D_{ij} \Gamma(P - y) - D_{ij} \Gamma(P_0 - y)) dy. \end{aligned}$$

第一项直接满足

$$|I_1| \leq C(n) [f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta^\alpha.$$

若 $y \in A$, 则 $|y - P| \leq 3\delta/2$ 。由 $|D^2\Gamma(z)| \leq C_n|z|^{-n}$,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C_n[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \int_{B_{3\delta/2}(P)} |P - y|^{\alpha-n} dy \\ &\leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta^\alpha. \end{aligned}$$

同理,

$$|I_3| \leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta^\alpha.$$

估计 I_4 。点 P 位于 A 内, 故 $D_{ij}\Gamma(P - y)$ 在 $B_3 \setminus A$ 上光滑。由散度定理,

$$\left| \int_{B_3 \setminus A} D_{ij}\Gamma(P - y) dy \right| \leq \int_{\partial B_3} |D_i\Gamma(P - y)| dS_y + \int_{\partial A} |D_i\Gamma(P - y)| dS_y.$$

在 ∂B_3 上 $|P - y| \geq 2$; 在 ∂A 上 $|P - y| \geq \delta/2$, 而 $|\partial A| = \omega_n \delta^{n-1}$ 。由 $|D\Gamma(z)| \leq C_n|z|^{1-n}$, 得到

$$\left| \int_{B_3 \setminus A} D_{ij}\Gamma(P - y) dy \right| \leq C(n).$$

因此

$$|I_4| \leq C(n)[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta^\alpha.$$

最后估计 I_5 。对每个 $y \in B_3 \setminus A$, 对 $D_{ij}\Gamma$ 使用中值定理, 存在依赖于 y 的 $\tilde{P}$ 在线段 $[P, P_0]$ 上, 使得

$$|D_{ij}\Gamma(P - y) - D_{ij}\Gamma(P_0 - y)| \leq C_n \delta |y - \tilde{P}|^{-n-1}.$$

当 $y \notin A$ 时,

$$|y - \tilde{P}| \geq \frac{1}{2}|y - \overline{P}|, \quad |y - P_0| \leq \frac{3}{2}|y - \overline{P}|.$$

故

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C_n[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta \int_{B_3 \setminus A} |y - \overline{P}|^{\alpha-n-1} dy \\ &\leq C_n[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta \int_{\delta}^4 r^{\alpha-2} dr \\ &\leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} \delta^\alpha, \end{aligned}$$

其中最后一步使用了 $0 < \alpha < 1$ 。

综合五项估计, 得到

$$|D_{ij}N(P) - D_{ij}N(P_0)| \leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; \mathbb{R}^n} |P - P_0|^\alpha.$$

对 $P, P_0 \in B_1$ 取上确界, 并对 i, j 取最大值, 即得结论。 □

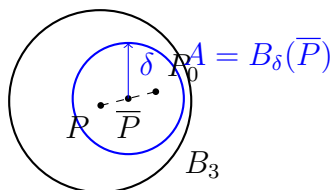


图 1: 定理 5.6 中的几何分解。点 P, P_0 都位于 A 内, 且它们到 ∂A 的距离均为 $\delta/2$ 。

5.2 内部 Schauder 估计

下面把牛顿位势估计用于一般泊松方程。为了使缩放关系清楚，写出带半径的形式。

定理 5.7 (内部 Schauder 估计). 设 $u \in C^2(B_{2R}(x_*))$ 满足

$$\Delta u = f \quad \text{于 } B_{2R}(x_*),$$

其中 $f \in C^\alpha(B_{2R}(x_*))$, $0 < \alpha < 1$ 。则 $u \in C^{2,\alpha}(B_R(x_*))$, 且

$$\begin{aligned} & \|D^2 u\|_{L^\infty(B_R(x_*))} + R^\alpha [D^2 u]_{\alpha; B_R(x_*)} \\ & \leq C_{n,\alpha} (R^{-2} \|u\|_{L^\infty(B_{2R}(x_*))} + \|f\|_{L^\infty(B_{2R}(x_*))} + R^\alpha [f]_{\alpha; B_{2R}(x_*)}). \end{aligned} \quad (1)$$

当 $R = 1$ 时，这就是

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C_{n,\alpha} (\|u\|_{L^\infty(B_2)} + \|f\|_{C^\alpha(B_2)})$$

的二阶核心部分。

证明. 取 $\eta \in C_c^\infty(B_{2R}(x_*))$, 使得 $\eta \equiv 1$ 于 $B_{3R/2}(x_*)$, 并令

$$w(x) := - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_n(x-y) \eta(y) f(y) dy.$$

由于定理 5.5, 有

$$\Delta w = \eta f = f \quad \text{于 } B_{3R/2}(x_*).$$

于是 $v := u - w$ 在 $B_{3R/2}(x_*)$ 内调和。

由定理 5.6 及缩放,

$$\|D^2 w\|_{L^\infty(B_R)} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha; B_R} \leq C_{n,\alpha} (\|f\|_{L^\infty(B_{2R})} + R^\alpha [f]_{\alpha; B_{2R}}). \quad (2)$$

同时, 由 $\int_{B_{2R}} |x-y|^{2-n} y \leq C_n R^2$,

$$\|w\|_{L^\infty(B_{3R/2})} \leq C_n R^2 \|f\|_{L^\infty(B_{2R})}.$$

对调和函数使用内部导数估计, 得到

$$\|D^2 v\|_{L^\infty(B_R)} + R^\alpha [D^2 v]_{\alpha; B_R} \leq C_n R^{-2} \|v\|_{L^\infty(B_{3R/2})}.$$

而

$$\|v\|_{L^\infty(B_{3R/2})} \leq \|u\|_{L^\infty(B_{2R})} + C_n R^2 \|f\|_{L^\infty(B_{2R})}.$$

结合 $u = v + w$ 与 (2), 便得到 (1)。 □

第六讲：内部 Schauder 估计

2026 年 8 月

记

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n}, \quad n \geq 3,$$

其中 $\omega_n = |\mathbb{S}^{n-1}|$ 。本讲统一取 $0 < \alpha < 1$ 。

6 内部 Schauder 估计

6.1 Newton 位势的 $C^{2,\alpha}$ 估计

先设 $f \in C^\alpha(B_2)$ ，并令

$$N(x) = \int_{B_2} \Gamma(x-y) f(y) dy.$$

由定理 5.3,

$$\nabla N(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_2} f(y) \frac{y-x}{|y-x|^n} dy$$

$$\|N\|_{L^\infty(B_1)} + \|DN\|_{L^\infty(B_1)} \leq C(n) \|f\|_{L^\infty(B_2)}. \quad (1)$$

由定理 5.5 以及常密度球位势的公式，对 $P \in B_1$ 有

$$D_{ij}N(P) = -\frac{1}{n} f(P) \delta_{ij} + \int_{B_2} (f(y) - f(P)) D_{ij} \Gamma(P-y) dy. \quad (2)$$

因为

$$|D^2 \Gamma(z)| \leq C_n |z|^{-n},$$

故

$$\|D^2 N\|_{L^\infty(B_1)} \leq C(n, \alpha) \left(\|f\|_{L^\infty(B_2)} + [f]_{\alpha; B_2} \right). \quad (3)$$

下面估计 $D^2 N$ 的 Hölder 半范数。固定 $P, P_0 \in B_1$ ，记

$$\delta = |P - P_0|, \quad \bar{P} = \frac{P + P_0}{2}.$$

若 $\delta \geq \frac{1}{4}$ ，则由 (3)，

$$|D_{ij}N(P) - D_{ij}N(P_0)| \leq C(n, \alpha) \left(\|f\|_{L^\infty(B_2)} + [f]_{\alpha; B_2} \right) \delta^\alpha.$$

因此只需考虑 $0 < \delta < \frac{1}{4}$ 。令

$$A = B_\delta(\bar{P}).$$

此时 $A \subset B_{5/4} \subset B_2$ 。由 (2)，记

$$I = D_{ij}N(P) - D_{ij}N(P_0),$$

则

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{n}(f(P) - f(P_0))\delta_{ij}, \\ I_2 &= \int_A (f(y) - f(P))D_{ij}\Gamma(P - y) dy, \\ I_3 &= -\int_A (f(y) - f(P_0))D_{ij}\Gamma(P_0 - y) dy, \\ I_4 &= (f(P_0) - f(P)) \int_{B_2 \setminus A} D_{ij}\Gamma(P_0 - y) dy, \\ I_5 &= \int_{B_2 \setminus A} (f(y) - f(P))(D_{ij}\Gamma(P - y) - D_{ij}\Gamma(P_0 - y)) dy. \end{aligned}$$

首先,

$$|I_1| \leq C(n)[f]_{\alpha; B_2} \delta^\alpha.$$

又因为

$$A \subset B_{3\delta/2}(P), \quad A \subset B_{3\delta/2}(P_0),$$

所以

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C_n[f]_{\alpha; B_2} \int_{B_{3\delta/2}(P)} |P - y|^{\alpha-n} dy \leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; B_2} \delta^\alpha, \\ |I_3| &\leq C(n, \alpha)[f]_{\alpha; B_2} \delta^\alpha. \end{aligned}$$

对 I_4 ，由散度定理，

$$\left| \int_{B_2 \setminus A} D_{ij}\Gamma(P_0 - y) dy \right| \leq \int_{\partial B_2} |D_i\Gamma(P_0 - y)| dS_y + \int_{\partial A} |D_i\Gamma(P_0 - y)| dS_y.$$

在 ∂B_2 上 $|P_0 - y| \geq 1$ ；在 ∂A 上，

$$|P_0 - y| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

再利用 $|D\Gamma(z)| \leq C_n|z|^{1-n}$ 和 $|\partial A| \leq C_n\delta^{n-1}$ ，得到

$$|I_4| \leq C(n)[f]_{\alpha; B_2} \delta^\alpha.$$

最后估计 I_5 。由中值定理，存在 $\tilde{P} \in [P, P_0]$ ，使得

$$|D_{ij}\Gamma(P - y) - D_{ij}\Gamma(P_0 - y)| \leq C_n\delta |\tilde{P} - y|^{-n-1}.$$

若 $y \notin A$, 则

$$|y - \tilde{P}| \geq |y - \bar{P}| - |\tilde{P} - \bar{P}| \geq \frac{1}{2}|y - \bar{P}|,$$

而且

$$|y - P| \leq |y - \bar{P}| + |P - \bar{P}| \leq \frac{3}{2}|y - \bar{P}|.$$

因此

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C_n [f]_{\alpha; B_2} \delta \int_{B_2 \setminus A} |y - \bar{P}|^{\alpha-n-1} dy \\ &\leq C_n [f]_{\alpha; B_2} \delta \int_{\delta}^3 r^{\alpha-2} dr \\ &\leq C(n, \alpha) [f]_{\alpha; B_2} \delta^{\alpha}. \end{aligned}$$

这里最后一步使用了 $0 < \alpha < 1$ 。

综上,

$$\begin{aligned} &\|N\|_{L^\infty(B_1)} + \|DN\|_{L^\infty(B_1)} + \|D^2N\|_{L^\infty(B_1)} + [D^2N]_{\alpha; B_1} \\ &\leq C(n, \alpha) \left(\|f\|_{L^\infty(B_2)} + [f]_{\alpha; B_2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

伸缩

若 $f \in C^\alpha(B_{2R})$, 令

$$\tilde{f}(z) = f(Rz), \quad \tilde{N}(z) = R^{-2}N(Rz).$$

则

$$[\tilde{f}]_{\alpha; B_2} = R^\alpha [f]_{\alpha; B_{2R}},$$

并且

$$D_z \tilde{N} = R^{-1} D_x N, \quad D_z^2 \tilde{N} = D_x^2 N, \quad [D_z^2 \tilde{N}]_{\alpha; B_1} = R^\alpha [D_x^2 N]_{\alpha; B_R}.$$

由 (4) 得

$$\begin{aligned} &\|N\|_{L^\infty(B_R)} + R\|DN\|_{L^\infty(B_R)} + R^2\|D^2N\|_{L^\infty(B_R)} + R^{2+\alpha}[D^2N]_{\alpha; B_R} \\ &\leq C(n, \alpha) \left(R^2\|f\|_{L^\infty(B_{2R})} + R^{2+\alpha}[f]_{\alpha; B_{2R}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

对球 $B_R(x_0)$, 记

$$\begin{aligned} \|u\|_{2, \alpha; B_R(x_0)}^* &:= \|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} + R\|Du\|_{L^\infty(B_R(x_0))} \\ &\quad + R^2\|D^2u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} + R^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha; B_R(x_0)}, \\ \|f\|_{0, \alpha; B_R(x_0)}^{(2)} &:= R^2\|f\|_{L^\infty(B_R(x_0))} + R^{2+\alpha}[f]_{\alpha; B_R(x_0)}. \end{aligned}$$

于是 (5) 可写为

$$\|N\|_{2, \alpha; B_R(x_0)}^* \leq C(n, \alpha) \|f\|_{0, \alpha; B_{2R}(x_0)}^{(2)}. \quad (6)$$

定理 6.1 (内部 Schauder 估计). 设 $u \in C^2(B_{2R})$ 满足

$$\Delta u = f \quad \text{于 } B_{2R},$$

其中 $f \in C^\alpha(B_{2R})$ 。则 $u \in C^{2,\alpha}(B_R)$ ，并且

$$\|u\|_{2,\alpha;B_R}^* \leq C(n, \alpha) \left(\|u\|_{L^\infty(B_{2R})} + \|f\|_{0,\alpha;B_{2R}}^{(2)} \right).$$

证明. 取 $\eta \in C_c^\infty(B_{2R})$ ，使得

$$\eta = 1 \quad \text{于 } B_{3R/2}, \quad |D\eta| \leq \frac{C}{R}.$$

令

$$N(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \eta(y) f(y) dy.$$

因为 $\Delta N = -\eta f$ ，所以

$$v := u + N$$

在 $B_{3R/2}$ 中调和。调和函数的内部导数估计给出

$$\|v\|_{2,\alpha;B_R}^* \leq C(n, \alpha) \|v\|_{L^\infty(B_{3R/2})}.$$

另一方面，

$$[\eta f]_{\alpha;B_{2R}} \leq [f]_{\alpha;B_{2R}} + CR^{-\alpha} \|f\|_{L^\infty(B_{2R})},$$

故由 (6)，

$$\|N\|_{2,\alpha;B_R}^* \leq C(n, \alpha) \|f\|_{0,\alpha;B_{2R}}^{(2)}.$$

同时

$$\|v\|_{L^\infty(B_{3R/2})} \leq \|u\|_{L^\infty(B_{2R})} + C(n) R^2 \|f\|_{L^\infty(B_{2R})}.$$

由 $u = v - N$ 即得结论。 □

6.2 常系数一致椭圆方程

考虑非散度型方程

$$-a^{ij}(x)u_{ij} = f,$$

并假设

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

引理 6.2 (常系数 Schauder 估计). 设 $A_0 = (a^{ij}(x_0))$ 为实对称矩阵，并且

$$\lambda I \leq A_0 \leq \Lambda I.$$

若

$$-a^{ij}(x_0)v_{ij} = g \quad \text{于 } B_r(x_0),$$

则

$$\|v\|_{2,\alpha;B_{r/2}(x_0)}^* \leq C(n, \alpha, \lambda, \Lambda) \left(\|v\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|g\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} \right).$$

证明. 先在球心 x_0 附近作线性变换

$$x = x_0 + A_0^{1/2}y, \quad \tilde{v}(y) = v(x), \quad \tilde{g}(y) = g(x).$$

由椭圆性,

$$B_{r/\sqrt{\Lambda}}(0) \subset A_0^{-1/2}(B_r(0)) \subset B_{r/\sqrt{\Lambda}}(0).$$

并且

$$-\Delta_y \tilde{v} = \tilde{g} \quad \text{于 } B_{r/\sqrt{\Lambda}}(0).$$

由定理 6.1, 再利用线性变换前后各阶导数及 Hölder 半范数的等价性, 令

$$\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda}},$$

可得

$$\|v\|_{2,\alpha;B_{\theta r/2}(x_0)}^* \leq C(n, \alpha, \lambda, \Lambda) \left(\|v\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|g\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} \right). \quad (7)$$

下面说明怎样由有限覆盖得到 $B_{r/2}(x_0)$ 上的估计。对任意 $x \in B_{r/2}(x_0)$, 都有

$$B_{r/2}(x) \subset B_r(x_0).$$

把上面的论证以 x 为球心、以 $r/2$ 为半径重复一次, 得到

$$\|v\|_{2,\alpha;B_{\theta r/4}(x)}^* \leq C(n, \alpha, \lambda, \Lambda) \left(\|v\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|g\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} \right).$$

由 $\overline{B_{r/2}(x_0)}$ 的紧性, 可取有限多个点 $x_1, \dots, x_N \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$, 使得

$$B_{r/2}(x_0) \subset \bigcup_{k=1}^N B_{\theta r/8}(x_k),$$

而每个较大的球 $B_{\theta r/4}(x_k)$ 上都有上述统一估计; 这里 N 只依赖于 n 和 θ 。

各阶导数的 L^∞ 范数可直接由这组覆盖控制。对 $[D^2v]_{\alpha;B_{r/2}(x_0)}$, 取任意 $P, Q \in B_{r/2}(x_0)$ 。若 $|P - Q| < \theta r/8$, 选择使 $P \in B_{\theta r/8}(x_k)$ 的一个 k , 则 $P, Q \in B_{\theta r/4}(x_k)$, 可以使用该球上的局部 Hölder 估计。若 $|P - Q| \geq \theta r/8$, 则

$$\frac{|D^2v(P) - D^2v(Q)|}{|P - Q|^\alpha} \leq 2 \left(\frac{8}{\theta r} \right)^\alpha \|D^2v\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))}.$$

因此有限覆盖确实给出所需的全局 Hölder 半范数估计, 且常数只依赖于 $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ 。引理得证。 $\square$

引理 6.3 (二阶插值不等式). 设 $u \in C^{2,\alpha}(B_r(x_0))$, 且 $0 < \theta < 4^{-\alpha}$ 。则

$$r^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))} \leq \theta r^{2+\alpha} [D^2u]_{\alpha;B_r(x_0)} + C(n, \alpha) \theta^{-2/\alpha} \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}, \quad (8)$$

$$r \|Du\|_{L^\infty(B_{r/2}(x_0))} \leq \theta r^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + C \theta^{-1} \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}. \quad (9)$$

证明. 固定 $x \in B_{r/2}(x_0)$ 和单位向量 e 。取 $0 < h < r/4$ 。Taylor 展开给出

$$u(x + he) - 2u(x) + u(x - he) = h^2 u_{ee}(x) + R_h,$$

其中

$$|R_h| \leq C[D^2u]_{\alpha; B_r(x_0)} h^{2+\alpha}.$$

因此

$$|u_{ee}(x)| \leq 4h^{-2} \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + C[D^2u]_{\alpha; B_r(x_0)} h^\alpha.$$

乘以 r^2 ，并取

$$h = \left(\frac{\theta}{C}\right)^{1/\alpha} r,$$

其中 C 取为足够大的固定常数。由 $\theta < 4^{-\alpha}$ 可保证 $h < r/4$ ，于是得到 (8)。对所有单位向量 e 取上确界，再利用对称矩阵范数的等价性，即得到 D^2u 的估计。

类似地，

$$u(x + he) - u(x) = hu_e(x) + O(h^2 \|D^2u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}),$$

所以

$$|u_e(x)| \leq 2h^{-1} \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + Ch \|D^2u\|_{L^\infty(B_r(x_0))}.$$

乘以 r ，再取 $h = \theta r/C$ ，即得 (9)。 □

第七讲：冻结系数法与 Sobolev 不等式

2026 年 8 月

沿用第六讲的记号，令

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha;B_r(x_0)}^* &:= \|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r\|Du\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r^2\|D^2u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha;B_r(x_0)}, \\ \|f\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} &:= r^2\|f\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r^{2+\alpha}[f]_{\alpha;B_r(x_0)}.\end{aligned}$$

下文对重复指标求和。

7 冻结系数法与 Sobolev 空间

7.1 冻结系数法

设 $A(x) = (a^{ij}(x))$ 为对称矩阵，并满足一致椭圆条件

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

其中 $0 < \lambda \leq \Lambda$ 。固定 x_0 ，令 $A_0 = A(x_0)$ 。若

$$-a^{ij}(x)u_{ij}(x) = f(x),$$

则在 $B_r(x_0) \Subset \Omega$ 中

$$-a^{ij}(x_0)u_{ij}(x) = f(x) + (a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0))u_{ij}(x) =: g(x).$$

由第六讲的常系数 Schauder 估计，

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha;B_{r/2}(x_0)}^* &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|g\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|f\|_{0,\alpha;B_r(x_0)}^{(2)} \right) \\ &\quad + Cr^2\|(a^{ij} - a^{ij}(x_0))u_{ij}\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \\ &\quad + Cr^{2+\alpha}[(a^{ij} - a^{ij}(x_0))u_{ij}]_{\alpha;B_r(x_0)}.\end{aligned} \tag{1}$$

由于

$$\|a^{ij} - a^{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq [A]_{\alpha;B_r(x_0)}r^\alpha, \tag{2}$$

以及乘积的 Hölder 半范数估计

$$[(a^{ij} - a^{ij}(x_0))u_{ij}]_{\alpha;B_r(x_0)}$$

$$\leq [A]_{\alpha; B_r(x_0)} \|D^2 u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + [A]_{\alpha; B_r(x_0)} r^\alpha [D^2 u]_{\alpha; B_r(x_0)}, \quad (3)$$

将 (2) 和 (3) 代入 (1), 得到

$$\begin{aligned} \|u\|_{2, \alpha; B_{r/2}(x_0)}^* &\leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + \|f\|_{0, \alpha; B_r(x_0)}^{(2)} \right) \\ &\quad + C[A]_{\alpha; B_r(x_0)} r^\alpha \left(r^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} + r^{2+\alpha} [D^2 u]_{\alpha; B_r(x_0)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

选取 $r_* > 0$, 使得

$$C[A]_{\alpha; B_R(x_0)} r_*^\alpha \leq \frac{1}{8}.$$

式 (4) 的左端在较小的球上, 而最后一项在较大的球上, 不能直接把最后一项移到左边。为此先给出下面的迭代引理。

引理 7.1 (内缩迭代). 设 Φ 在 $[s_0, s_1]$ 上非负且有界。若对所有 $s_0 \leq s < t \leq s_1$ 都有

$$\Phi(s) \leq \theta \Phi(t) + M(t-s)^{-\gamma}, \quad 0 < \theta < 1, \quad \gamma > 0, \quad (5)$$

则

$$\Phi(s_0) \leq C(\theta, \gamma) M(s_1 - s_0)^{-\gamma}.$$

证明. 取 $\tau \in (0, 1)$, 使得 $\theta\tau^{-\gamma} < 1$, 并令

$$t_k = s_1 - (s_1 - s_0)\tau^k.$$

则 $t_0 = s_0$, $t_k \uparrow s_1$, 且

$$t_{k+1} - t_k = (s_1 - s_0)\tau^k(1 - \tau).$$

反复使用 (5), 得到

$$\Phi(s_0) \leq \theta^N \Phi(t_N) + M(s_1 - s_0)^{-\gamma} (1 - \tau)^{-\gamma} \sum_{k=0}^{N-1} \theta^k \tau^{-k\gamma}.$$

令 $N \rightarrow \infty$ 。由于 Φ 有界且 $\theta\tau^{-\gamma} < 1$, 即得结论。 $\square$

定理 7.2 (非散度型 Schauder 估计). 设 $u \in C^{2, \alpha}(B_R(x_0))$ 满足

$$-a^{ij}(x)u_{ij} = f \quad \text{于 } B_R(x_0),$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $A = (a^{ij})$ 对称并满足上述一致椭圆条件, 且 $A, f \in C^\alpha(B_R(x_0))$ 。则

$$\|u\|_{2, \alpha; B_{R/2}(x_0)}^* \leq C \left(\|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} + \|f\|_{0, \alpha; B_R(x_0)}^{(2)} \right),$$

其中

$$C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, R^\alpha [A]_{\alpha; B_R(x_0)}).$$

证明. 经平移和缩放, 只需证明 $R = 1$ 、 $x_0 = 0$ 的情形。取

$$\frac{1}{2} \leq s < t \leq \frac{3}{4}, \quad d = t - s, \quad r = c \min\{r_*, d\},$$

其中 $0 < c < 1/8$ 固定得足够小, 使得 $B_{s+2r} \subset B_t$ 。由 $\overline{B_s}$ 的紧性, 可以取有限个 $x_i \in \overline{B_s}$, 使得

$$B_s \subset \bigcup_i B_{r/8}(x_i).$$

对每个 i , 有 $B_r(x_i) \subset B_t$ 。由 (4) 以及 $r \leq r_*$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,\alpha;B_{r/2}(x_i)}^* &\leq C (\|u\|_{L^\infty(B_t)} + \|f\|_{C^\alpha(B_t)}) \\ &\quad + \frac{1}{8} (r^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{s+r})} + r^{2+\alpha} [D^2 u]_{\alpha;B_{s+r}}). \end{aligned} \quad (6)$$

若 $x, y \in B_s$ 且 $|x-y| < r/8$, 选取满足 $x \in B_{r/8}(x_i)$ 的覆盖球, 则 $y \in B_{r/4}(x_i) \subset B_{r/2}(x_i)$, 故可以在同一个球中使用 (6)。若 $|x-y| \geq r/8$, 则

$$\frac{|D^2 u(x) - D^2 u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2 \left(\frac{8}{r}\right)^\alpha \|D^2 u\|_{L^\infty(B_s)}. \quad (7)$$

由近点和远点两种情形,

$$\begin{aligned} r^{2+\alpha} [D^2 u]_{\alpha;B_s} &\leq C (\|u\|_{L^\infty(B_t)} + \|f\|_{C^\alpha(B_t)}) + Cr^2 \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{s+r})} \\ &\quad + \frac{1}{8} r^{2+\alpha} [D^2 u]_{\alpha;B_{s+r}}. \end{aligned} \quad (8)$$

在缓冲层 $B_{s+2r} \subset B_t$ 上使用第六讲的二阶插值不等式, 对任意足够小的 $\theta > 0$ 有

$$r^{-\alpha} \|D^2 u\|_{L^\infty(B_{s+r})} \leq \theta [D^2 u]_{\alpha;B_t} + C\theta^{-2/\alpha} r^{-2-\alpha} \|u\|_{L^\infty(B_t)}.$$

先选取 θ 足够小, 再将此式代入 (8), 得到

$$[D^2 u]_{\alpha;B_s} \leq \frac{1}{4} [D^2 u]_{\alpha;B_t} + Cr^{-2-\alpha} (\|u\|_{L^\infty(B_t)} + \|f\|_{C^\alpha(B_t)}).$$

若 $d \leq r_*$, 则 $r = cd$; 若 $d > r_*$, 则 $r = cr_*$, 而 $d \leq 1/4$ 。因此在两种情形下都可写成

$$[D^2 u]_{\alpha;B_s} \leq \frac{1}{4} [D^2 u]_{\alpha;B_t} + Cd^{-2-\alpha} (\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}). \quad (9)$$

其中常数允许依赖于 $[A]_{\alpha;B_1}$ 。

再在 $B_s \subset B_t$ 之间使用一阶、二阶插值不等式。具体地, 对任意足够小的 $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^\infty(B_s)} &\leq \theta d^\alpha [D^2 u]_{\alpha;B_t} + C\theta^{-2/\alpha} d^{-2} \|u\|_{L^\infty(B_t)}, \\ \|Du\|_{L^\infty(B_s)} &\leq \theta d \|D^2 u\|_{L^\infty(B_t)} + C\theta^{-1} d^{-1} \|u\|_{L^\infty(B_t)}. \end{aligned}$$

依次把参数取得足够小, 并结合 (9), 可得

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_s)} \leq \frac{1}{4} \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_t)} + Cd^{-2-\alpha} (\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}).$$

令

$$\Phi(s) = \|u\|_{C^{2,\alpha}(B_s)}, \quad \theta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = 2 + \alpha.$$

对 $s \in [1/2, 3/4]$ 应用引理 7.1, 得到

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_{1/2})} \leq C (\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{C^\alpha(B_1)}).$$

最后缩放回 $B_R(x_0)$, 即得所述估计。 $\square$

7.2 弱导数与 Sobolev 空间

定义 7.3 (弱导数). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为多重指标. 若对每个 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx,$$

则称 v 是 u 的 α 阶弱导数, 记作 $D^\alpha u = v$.

定义 7.4 (Sobolev 空间). 令 $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. 定义

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \text{ 在弱意义下存在且 } D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

当 $p = 2$ 时, 常记

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

定义 7.5 (Sobolev 范数). 当 $1 \leq p < \infty$ 时, 对 $u \in W^{k,p}(\Omega)$ 定义

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

当 $p = \infty$ 时, 定义

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

注记. Sobolev 空间的逼近定理、延拓定理和迹定理可参见 Evans 《偏微分方程》第五章。

定理 7.6 (Sobolev 不等式). 设 $1 \leq p < n$, 并令

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

则存在常数 $C = C(n, p)$, 使得对每个 $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ 都有

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

证明. 先证明 $p = 1$. 为说明基本计算, 先取 $n = 3$. 由于 u 紧支, 对每个 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 由微积分基本定理,

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2, x_3)| \, dt,$$

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t, x_3)| \, dt,$$

$$|u(x_1, x_2, x_3)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_3 u(x_1, x_2, t)| \, dt.$$

将三式相乘并取三次方根, 得到

$$\begin{aligned} |u(x)|^{3/2} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2, x_3)| \, dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t, x_3)| \, dt \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_3 u(x_1, x_2, t)| \, dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

依次对 x_1, x_2, x_3 积分并使用 Hölder 不等式，得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{3/2} dx \leq \prod_{j=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_j u| dx \right)^{1/2}.$$

由算术-几何平均不等式以及 $|\partial_1 u| + |\partial_2 u| + |\partial_3 u| \leq \sqrt{3}|Du|$ ，

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{3/2} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} |Du| dx \right)^{3/2}.$$

因此

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{3/2} dx \right)^{2/3} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |Du| dx.$$

在一般维数中重复上述论证，得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq C(n) \int_{\mathbb{R}^n} |Du| dx. \quad (10)$$

下面设 $1 < p < n$ ，并令 p' 满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

取

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1, \quad v = |u|^\gamma.$$

因为 $\gamma > 1$ ，所以 $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ 。对 v 应用 (10)，并利用链式法则，得到

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} &\leq C(n) \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |Du| dx \\ &\leq C(n) \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)p'} dx \right)^{1/p'} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

由所选的 γ ，

$$\frac{\gamma n}{n-1} = p^*, \quad (\gamma-1)p' = p^*.$$

若 $u \not\equiv 0$ ，约去公共因子后得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{(n-1)/n-1/p'} \leq C(n, p) \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

而

$$\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p^*}.$$

因此

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, p) \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

当 $u \equiv 0$ 时结论显然成立。 □

第八讲：De Giorgi-Nash 正则性理论

8 主要定理 (De Giorgi-Nash Theorem)

定理 8.1 (De Giorgi-Nash). 设 $u \in H^1(B_1)$ 是方程 $\sum_{i,j=1}^n D_i(a^{ij}(x)u_j) = 0$ 在 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 中的弱解, 其中系数满足一致椭圆性条件:

$$0 < \lambda I \leq (a^{ij}) \leq \Lambda I < \infty$$

即对 $\forall \varphi \in H_0^1(B_1)$, 有 $\int_{B_1} a^{ij}(x)u_i \varphi_j = 0$.

则 $u \in C^\alpha(B_{1/2})$, 其中 $0 < \alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda) < 1$, 且满足:

$$\|u\|_{C^\alpha(B_{1/2})} = \sup |u| + \sup_{x,y \in B_{1/2}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(n, \lambda, \Lambda) \|u\|_{L^2(B_1)}$$

8.1 动机与背景 (Motivation)

- **变分法问题:** 研究 $\inf \int F(Du)$ (其中 F 为凸函数、解析函数, 且 $\det \nabla^2 F > 0$).
- **例子:** $F(x) = |x|^2$ 或 $F(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$.
- **Euler-Lagrange 方程:** $\sum_{i=1}^n D_i(F_{p_i}(Du)) = 0$, 或者展开为 $\sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(Du) u_{ij} = 0$.
- **历史背景:**
 - (1900') Hilbert 第 19 问题: F 光滑是否意味着 u 光滑?
 - S. Bernstein (1904): 对 $n = 2$ 的 C^3 解成立。
 - De Giorgi (1957) 与 Nash (1958): 证明了 Lipschitz 解也是 $C^{1,\alpha}$ 的。
- **De Giorgi-Nash 迭代的应用:** 为了应用 Schauder 估计, 我们考察解沿方向 $e \in S^{n-1}$ 的导数。对欧拉-拉格朗日方程 $\sum_{i=1}^n D_i(F_{p_i}(Du)) = 0$ 关于方向 e 求导:

$$D_e \sum_{i=1}^n D_i(F_{p_i}(Du)) = \sum_{i,j=1}^n D_i(F_{p_i p_j}(Du) D_j u_e) = 0$$

令 $V = u_e$ (即 u 的方向导数), 则 V 满足线性方程:

$$\sum_{i,j=1}^n D_i(A_{ij}(x) D_j V) = 0, \quad \text{其中 } A_{ij}(x) = F_{p_i p_j}(Du)$$

当 $|Du| \leq C$ 时, 系数矩阵满足一致椭圆性条件 $\lambda \leq F_{p_i p_j} \leq \Lambda$ 。

通过 De Giorgi-Nash 定理, 我们可以建立如下正则性提升链 (Bootstrap Argument):

1. **第一步:** 根据 De Giorgi-Nash 定理, $V \in C^\alpha \implies u \in C^{1,\alpha}$ 。
2. **第二步:** 既然 $u \in C^{1,\alpha}$, 那么系数 $F_{p_i p_j}(Du)$ 也是 C^α 的。根据非散度型的 Schauder 估计, 方程的解 $V \in C^{1,\alpha}$, 即 $u \in C^{2,\alpha}$ 。
3. **第三步:** 进一步用 Schauder 估计, $u \in C^{2,\alpha} \implies F_{p_i p_j}(Du) \in C^{1,\alpha} \implies u \in C^{3,\alpha}$ 。
4. **结论:** 如此反复循环 (即 Bootstrap 论证), 最终可得: $u \in C^\infty$ 。

8.2 局部有界性估计 (Local Boundedness)

定义 8.1 (弱次解与弱超解). 称 $u \in H^1(B_1)$ 在 B_1 中弱成立地满足 $D_i(a^{ij}u_j) \geq 0$ (≤ 0), 若:

- **次解 (Subsolution):** u 是次解, 如果对于所有测试函数 $\varphi \in H_0^1(B_1)$ 且 $\varphi \geq 0$, 均满足:

$$\int_{B_1} a^{ij} u_i \varphi_j \leq 0$$

- **超解 (Supersolution):** u 是超解, 如果对于所有测试函数 $\varphi \in H_0^1(B_1)$ 且 $\varphi \geq 0$, 均满足:

$$\int_{B_1} a^{ij} u_i \varphi_j \geq 0$$

引理 8.1. 设 $u \in H^1(B_1)$ 在 B_1 内满足 $D_i(a^{ij}u_j) \geq 0$ (弱次解), 则:

$$\|u^+\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq C \|u^+\|_{L^2(B_1)}$$

注记 8.1. 当 $u \in H^1$ 时, 易知 $u^+ := \max\{u, 0\} \in H^1$ 。并且, 若 u 是弱次解, 则可证 u^+ 也是弱次解。

证明. 记号: 令 $u_k \triangleq [u - (1 - 2^{-k})]^+$, 对应的球半径为 $B_k \triangleq B_{1/2+2^{-k}}$ 。定义能量序列: $a_k \triangleq \int_{B_k} u_k^2$ 。选取截断函数 $\eta \in C_c^\infty(B_{k-1})$, 使得:

$$\eta = 1 \text{ 在 } B_k \text{ 上, } 0 \leq \eta \leq 1, \quad |\nabla \eta| \leq C 2^k$$

不妨假设 $\Lambda = \lambda^{-1}$ 。

证明:

1. Caccioppoli 不等式:

$$\int_{B_{k-1}} |\nabla(u_k \eta)|^2 \leq C(\lambda) \int_{B_{k-1}} u_k^2 |\nabla \eta|^2 \leq C 2^{2k} \int_{B_{k-1}} u_{k-1}^2 = C 2^{2k} a_{k-1}.$$

以上红色不等式的证明：对弱次解 u ，选取测试函数 $\varphi = \eta^2 u^+ \geq 0$ 。代入弱形式 $\int a^{ij} u_i \varphi_j \leq 0$ 得：

$$0 \geq \int_B a^{ij} u_i \partial_j (\eta^2 u) = \int_B a^{ij} u_i (2\eta \eta_j u + \eta^2 u_j)$$

移项得：

$$\int \eta^2 a^{ij} u_i u_j \leq - \int 2\eta u a^{ij} u_i \eta_j. \quad (1)$$

另一方面：

$$\int a^{ij} (\eta u)_i (\eta u)_j = \int a^{ij} \eta_i \eta_j u^2 + 2a^{ij} \eta_i u_j \eta u + \eta^2 a^{ij} u_i u_j.$$

带入不等式(1)得到

$$\int a^{ij} (\eta u)_i (\eta u)_j \leq \int a^{ij} \eta_i \eta_j u^2.$$

利用椭圆性条件 $\lambda |\nabla(\eta u)|^2 \leq a^{ij} (\eta u)_i (\eta u)_j$ 得：

$$\int_B |\nabla(\eta u)|^2 \leq C(\lambda) \int_B u^2 |\nabla \eta|^2.$$

2. Sobolev 嵌入：

$$\left(\int_{B_k} u_k^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_{B_{k-1}} |u_k \eta|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C(n) \int_{B_{k-1}} |\nabla(u_k \eta)|^2,$$

这里 $2^* := \frac{2n}{n-2}$ 。

3. Hölder 不等式：

$$a_k \leq \left(\int_{B_k} u_k^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} |\{u_k > 0\} \cap B_k|^{\frac{2}{n}}.$$

4. 根据 a_k 和 u_k 的定义：

$$|\{u_k > 0\} \cap B_k| \leq 2^{2k} \int_{B_{k-1}} [(u - 1 + 2^{-k} + 2^{-k})^+]^2 = 2^{2k} a_{k-1}$$

5. 迭代公式：结合以上得到

$$a_k \leq C(n, \lambda) 2^{(2+4/n)k} a_{k-1}^{1+2/n} \leq B(n, \lambda)^k a_{k-1}^\beta,$$

这里 $B(n, \lambda) = 4C(n, \lambda) 2^{\frac{4}{n}}$ 并且 $\beta = 1 + \frac{2}{n} > 1$ 。

6. 收敛性：由迭代公式得到

$$\begin{aligned} a_k &\leq B^k a_{k-1}^\beta \\ a_{k-1} &\leq B^{k-1} a_{k-2}^\beta \\ &\dots \\ a_1 &\leq B a_0^\beta. \end{aligned}$$

我们有

$$a_k \leq B^{k+(k-1)\beta+\dots+\beta^{k-1}} a_0^{\beta^k} = B^{-\frac{kn}{2}-\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)} \left(B^{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)} a_0 \right)^{\beta^k}.$$

选 $\epsilon_0 = \frac{1}{2} B^{-(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}}$ 并令 $v = \frac{\epsilon_0^{\frac{1}{2}} u^+}{\|u^+\|_{L^2(B_1)}}$, 则 $a_0 = \int_{B_1} (u^+)^2 \leq \epsilon_0$. 这时有

$$a_k \leq B^{-\frac{kn}{2}-\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)} \rightarrow 0 \quad \text{当 } k \rightarrow \infty.$$

这意味着 $\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u^+ \leq 1$. 最终推出

$$\|u^+\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C(n, \lambda) \|u^+\|_{L^2(B_1)}.$$

8.3 Hölder 连续性 (Hölder Continuity)

这节我们将主要证明弱解 u 满足 $\text{osc}_{B_{1/2}} u \leq \theta(n, \lambda) \cdot \text{osc}_{B_1} u$, 其中 $\theta < 1$. 然后通过伸缩 (Scaling) $u = u(rx)$ 得到

$$\text{osc}_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq \theta \cdot \text{osc}_{B_r} u \quad \forall B_r \subset B_1.$$

由此通过简单的迭代和上一节的局部有界估计可推导出

$$\text{osc}_{B_\rho} u \leq \rho^\alpha C(n, \lambda) \text{osc}_{B_{\frac{1}{4}}} u \leq \rho^\alpha C(n, \lambda) \|u\|_{L^2(B_1)}$$

其中 $\alpha(n, \lambda) = \frac{\log \theta}{\log \frac{1}{2}} > 0$. 由此得到 $u \in C^\alpha$.

通过规整化 $u = \frac{u - \inf_{B_1} u}{\text{osc}_{B_1} u}$. 我们只要证明如下引理

引理 8.2. 假设 u 是弱超解满足 $\sup_{B_1} u = 1$, $\inf_{B_1} u = 0$, 且 $0 \leq u \leq 1$ 于 B_1 . 若

$$|\{x \in B_{\frac{3}{4}} : u(x) \geq 1/2\}| \geq \frac{1}{2} |B_{3/4}|,$$

则 u 在内部一致远离 0, 即存在常数 $c(n, \lambda) > 0$ 使得

$$\inf_{B_{1/2}} u \geq c(n, \lambda) > 0.$$

由此容易推出振荡衰减:

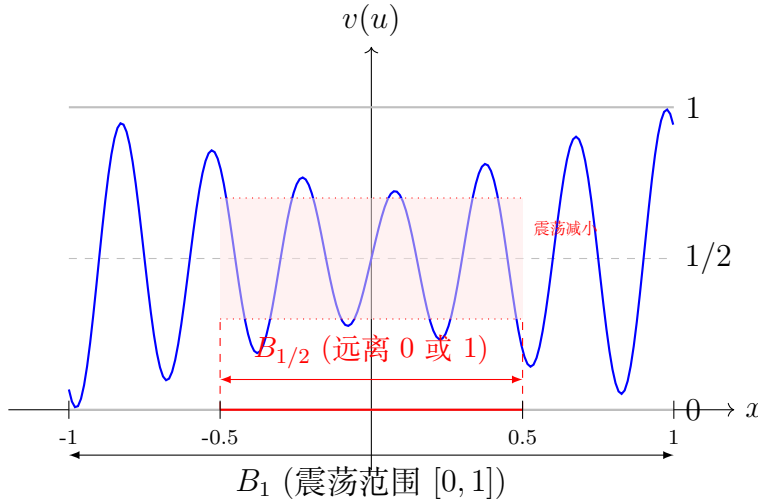
$$\text{osc}_{B_{1/2}} u \leq \theta \cdot \text{osc}_{B_1} u,$$

其中 $\theta = \theta(n, \lambda) < 1$.

注记 8.2. 若

$$|\{x \in B_{\frac{3}{4}} : u(x) \leq 1/2\}| \geq \frac{1}{2} |B_{3/4}|,$$

则考虑 $u = 1 - u$. 同样可以推出振荡衰减。



证明. 第一步：变量转换 假设 $u > 0$ (若不满足, 可令 $u = u + \delta$ 最后取极限)。为了将下界估计转化为上界估计, 我们构造对数辅助函数: 令 $v = (\log 2u)^- = (-\log 2u)^+$ 。

第二步：次解判定 若 $u > 0$ 是一个超解 (supersolution), 则 $\bar{v} = -\log 2u$ 是一个次解 (subsolution)。因此 $v = (\bar{v})^+$ 也是一个次解。验证: 对 $\forall \varphi \in H_0^1, \varphi \geq 0$, 计算 $\int a^{ij} \bar{v}_i \varphi_j$:

$$\int_{B_1} a^{ij} \partial_i (-\log 2u) \partial_j \varphi = - \int_{B_1} a^{ij} \frac{u_i}{u} \varphi_j = - \int_{B_1} a^{ij} u_i D_j \left(\frac{\varphi}{u} \right) - \int_{B_1} a^{ij} \frac{u_i u_j}{u^2} \varphi \leq 0$$

第三步：梯度估计 选取测试函数 $\varphi = \frac{\eta^2}{u} \in H_0^1(B_1)$ 代入方程 $\int a^{ij} u_i \varphi_j = 0$:

$$\int a^{ij} u_i \left(\frac{2\eta \eta_j}{u} - \frac{\eta^2 u_j}{u^2} \right) \geq 0$$

再由 Young 不等式得:

$$\int a^{ij} \frac{u_i}{u} \frac{u_j}{u} \eta^2 \leq 2 \int a^{ij} \frac{u_i}{u} \eta \eta_j \leq \frac{1}{2} \int a^{ij} \frac{u_i}{u} \frac{u_j}{u} \eta^2 + 2 \int a^{ij} \eta_i \eta_j$$

令 $v_i = \partial_i (\log u)$, 利用椭圆性条件:

$$\int |\nabla v|^2 \eta^2 \leq C(\lambda) \int |\nabla \eta|^2 \leq C(n, \lambda).$$

这表明 v 的梯度模受控。

第四步：利用引理 8.1 得出结论 由于 v 是次解, 根据引理 8.1 (局部有界性):

$$\sup_{B_{1/4}} v \leq C(n, \lambda) \left(\int_{B_{3/4}} v^2 \right)^{1/2}$$

再由后面的引理 8.3, 在假设下 ($|\{x \in B_{3/4} : u(x) \geq 1/2\}| \geq \frac{1}{2}|B_{3/4}|$) 我们有

$$\sup_{B_{1/4}} v \leq C(n, \lambda) \left(\int_{B_{3/4}} v^2 \right)^{1/2} \leq C(n, \lambda) \left(\int_{B_{3/4}} |\nabla v|^2 \right)^{1/2}.$$

结合第三步得到

$$\sup_{B_{\frac{1}{4}}} v \leq C(n, \lambda).$$

由于 $v = (-\log 2u)^+$, 上式 $\sup v \leq C$ 意味着:

$$-\log 2u \leq C \implies 2u \geq e^{-C} \implies u \geq \frac{1}{2}e^{-C}$$

令 $c = \frac{1}{2}e^{-C}$, 即证得 $\inf_{B_{1/4}} u \geq c > 0$. $\square$

引理 8.3 (Poincaré-Sobolev). 设 $v \in H^1(B_1)$. 定义集合 $A = \{x \in B_1 : v(x) = 0\}$. 若该集合的测度满足 $|A| \geq \frac{1}{2}|B_1|$, 则对于任意 $v \in H^1(B_1)$, 存在常数 $C(n)$ 使得:

$$\int_{B_1} v^2 \leq C(n) \int_{B_1} |\nabla v|^2$$

证明: 反证法 (Proof by Contradiction). 假设结论不成立. 则对于每一个整数 m , 都存在一个函数序列 $\{v_m\} \in H^1(B_1)$, 满足:

1. 集合条件: $|\{x \in B_1 : v_m(x) = 0\}| \geq \frac{1}{2}|B_1|$;
2. 归一化条件: $\int_{B_1} v_m^2 = 1$;
3. 矛盾假设: $\int_{B_1} |\nabla v_m|^2 \rightarrow 0$ (当 $m \rightarrow \infty$ 时).

第一步: 弱收敛与强收敛 由于 $\int v_m^2 = 1$ 且 $\int |\nabla v_m|^2 \rightarrow 0$, 序列 $\{v_m\}$ 在 $H^1(B_1)$ 中是有界的. 根据 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理, 存在子列 (仍记为 $\{v_m\}$) 使得:

- $v_m \rightarrow v_0$ 在 $L^2(B_1)$ 中强收敛;
- $v_m \rightharpoonup v_0$ 在 $H^1(B_1)$ 中弱收敛.

第二步: 极限函数的性质 由于 $\int |\nabla v_m|^2 \rightarrow 0$, 根据梯度的下半连续性:

$$\int_{B_1} |\nabla v_0|^2 \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{B_1} |\nabla v_m|^2 = 0$$

这意味着 $\nabla v_0 = 0$ 几乎处处成立, 因此 v_0 必为一个常数.

再由 L^2 强收敛性:

$$\int_{B_1} v_0^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_1} v_m^2 = 1$$

由此可见, v_0 是一个非零常数 ($|v_0| = |B_1|^{-1/2} \neq 0$).

第三步: 导出矛盾 考察 v_m 的零值集. 令 $A_m = \{x \in B_1 : v_m = 0\}$. 根据假设 $|A_m| \geq \frac{1}{2}|B_1|$. 然而, 由于 $v_m \rightarrow v_0$ 在 L^2 中强收敛, 意味着 v_m 也在测度意义下收敛于 v_0 . 因为 v_0 是非零常数, 我们可以得出:

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B_1} |v_m - v_0|^2 \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} |0 - v_0|^2 = |v_0|^2 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} |A_m|$$

由于 $|v_0| > 0$ 且 $\lim_{m \rightarrow \infty} |A_m| \geq \frac{1}{2}|B_1| > 0$, 上述不等式左侧为 0, 右侧大于 0.

这产生了一个矛盾 (A contradiction!). 因此, 原命题成立. $\square$

综合以上引理, 我们得到了 De Giorgi-Nash 定理的证明. $\square$

第九讲：极小曲面先验内梯度估计

9 主要定理

定理 9.1 (内梯度估计). 设 $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ 为单位球, $u \in C^3(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ 是极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = 0 \quad \text{在 } B_1 \quad (1)$$

的解, 记

$$v(x) := \sqrt{1+|Du(x)|^2}.$$

则对任意 $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$, 存在常数 C 使得

$$v(x_0) \leq C \left(n, \sup_{B_1} |u| \right).$$

注记 9.1. 本节内容参考 [GT, Chapter 16]. 此定理 $n=2$ 是 *R.Finn* ('54) 证明的, $n>2$ 是 *Bombieri-De Giorgi-Miranda* ('69) 证明的。

注记 9.2. 一个简单的应用是一列有上下界的极小曲面方程的解, 存在子列收敛到一个光滑的极小曲面。

证明. 步骤 0. 记号.

不妨设 $x_0 = 0$, 因此下文只在 $B_1 := B_1(0)$ 上讨论。记

$$u_i := \partial_i u, \quad u_{ij} := \partial_{ij} u, \quad Du = (u_1, \dots, u_n).$$

超曲面可表示为图 $X = (x, u(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 。它的诱导度量为

$$g_{ij} = X_i \cdot X_j = \delta_{ij} + u_i u_j.$$

体积元为

$$v = \sqrt{\det g} = \sqrt{1+|Du|^2}.$$

度量的逆为

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2}.$$

我们之后要研究的（下调和）量为

$$w := \log v.$$

极小曲面方程也可以写成非散度形式：

$$g^{ij}(Du) u_{ij} = 0, \quad g^{ij}(p) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1 + |p|^2}, \quad (2)$$

注意 g^{ij} 对称、半正定，且光滑依赖于 p 。

步骤 1. 推导 w 所满足的方程，并得到基本不等式 $g^{ij}w_{ij} - g^{ij}w_i w_j \geq 0$.

计算 w 的一阶、二阶导数：

$$\begin{aligned} w &= \log \sqrt{1 + |Du|^2}, \quad w_i = \frac{1}{v^2} \sum_m u_m u_{mi}, \\ w_{ij} &= \frac{1}{v^2} \sum_m u_{mi} u_{mj} + \frac{1}{v^2} \sum_m u_m u_{mij} - \frac{2}{v^4} \left(\sum_m u_m u_{mi} \right) \left(\sum_\ell u_\ell u_{\ell j} \right). \end{aligned}$$

将 w_{ij} 代入 $g^{ij}w_{ij} - g^{ij}w_i w_j$ ：

$$\begin{aligned} g^{ij}w_{ij} - g^{ij}w_i w_j &= \frac{1}{v^2} g^{ij} \sum_m u_{mi} u_{mj} + \frac{1}{v^2} g^{ij} \sum_m u_m u_{mij} - \frac{3}{v^4} g^{ij} \left(\sum_m u_m u_{mi} \right) \left(\sum_\ell u_\ell u_{\ell j} \right) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

分别处理 I_2, I_1, I_3 . 对 (2) 关于 x_k 求导得

$$\partial_k (g^{ij}(Du)) u_{ij} + g^{ij}(Du) u_{ijk} = 0.$$

由链式法则：

$$\partial_k g^{ij}(Du) = \sum_\ell \frac{\partial g^{ij}}{\partial p_\ell}(Du) u_{\ell k} =: \sum_\ell g_{p_\ell}^{ij}(Du) u_{\ell k},$$

于是

$$\sum_\ell g_{p_\ell}^{ij}(Du) u_{\ell k} u_{ij} + g^{ij}(Du) u_{ijk} = 0. \quad (3)$$

由于 $g^{ij}(p) = \delta^{ij} - \frac{p_i p_j}{1 + |p|^2}$ ，可得

$$g_{p_\ell}^{ij}(p) = -\frac{\delta_{i\ell} p_j + \delta_{j\ell} p_i}{1 + |p|^2} + \frac{2p_i p_j p_\ell}{(1 + |p|^2)^2}.$$

代入(3)，并乘以 u_k 对 k 求和，得到

$$\sum_k u_k g^{ij} u_{ijk} = \frac{2 \sum_i (\sum_j u_j u_{ij})^2}{v^2} - \frac{2 (\sum_{i,j} u_i u_j u_{ij})^2}{v^4}. \quad (4)$$

把 (4) 代入 I_2 得

$$I_2 = \frac{1}{v^2} \sum_m u_m g^{ij} u_{mij} = \frac{2 \sum_i (\sum_j u_j u_{ij})^2}{v^4} - \frac{2 (\sum_{i,j} u_i u_j u_{ij})^2}{v^6}.$$

注意

$$I_1 = \frac{1}{v^2} g^{ij} u_{mi} u_{mj} = \frac{\sum_{i,j} u_{ij}^2}{v^2} - \frac{\sum_i (\sum_j u_i u_{ij})^2}{v^4},$$

$$I_3 = -\frac{3}{v^4} g^{ij} \left(\sum_m u_m u_{mi} \right) \left(\sum_\ell u_\ell u_{\ell j} \right) = -\frac{3 \sum_i (\sum_j u_j u_{ji})^2}{v^4} + \frac{3 (\sum_{i,j} u_i u_j u_{ij})^2}{v^6}.$$

将上述合并得

$$g^{ij} w_{ij} - g^{ij} w_i w_j = \frac{\sum_{i,j} u_{ij}^2}{v^2} - \frac{2 \sum_i (\sum_j u_j u_{ij})^2}{v^4} + \frac{(\sum_{i,j} u_i u_j u_{ij})^2}{v^6} = \frac{\sum_{i,j,k,\ell} g^{k\ell} g^{ij} u_{ki} u_{\ell j}}{v^2} \geq 0.$$

注记 9.3. 由于 (3) 蕴含 $g^{ij} \Gamma_{ij}^k = 0$, 上式可以写成更几何的形式

$$\Delta_g w \geq |\nabla^g w|^2.$$

步骤 2: 平均值不等式的推导

设 $x_0 = 0$ 且 $u(0) = 0$ (可通过平移实现)。在曲面 Σ 上定义“弦距离”平方函数:

$$r^2(x) := |x|^2 + |u(x)|^2.$$

定义曲线上的“球”在 x -空间中的投影为

$$\mathcal{B}_r = \{x \in B_1 \mid r(x) < r\}.$$

在极小曲面图 $\Sigma = \{(x, u(x))\}$ 上, 我们需要为次调和函数 w 建立如下的平均值不等式:

$$\frac{d}{dr} \left(r^{-n} \int_{\mathcal{B}_r} w(x) d\Sigma \right) = \frac{d}{dr} \left(r^{-n} \int_{\mathcal{B}_r} w(x) v(x) dx \right) \geq 0.$$

令 χ 为一个非负、非减的 C^1 函数, 支集包含在 $(0, \infty)$ 中。定义

$$\Psi(r(x)) = \int_{r(x)}^{\infty} t \chi(\rho - t) dt, \quad \text{其中 } 0 < \rho < 1.$$

首先有

$$2rr_i = 2x_i + 2u_i u,$$

$$2r_i r_j + 2rr_{ij} = 2\delta_{ij} + 2u_{ij} u + 2u_i u_j.$$

然后

- 一阶导数: $\Psi_i = \Psi' r_i = -r \chi(\rho - r) r_i$;
- 二阶导数:

$$\Psi_{ij} = -\chi r_i r_j + r \chi' r_i r_j - \chi(g_{ij} + u_{ij} u - r_i r_j) = r \chi'(\rho - r) r_i r_j - \chi g_{ij} - \chi u_{ij} u.$$

计算在曲面上的 Laplace 算子：

$$g^{ij}\Psi_{ij} = r\chi'|\nabla_g r|^2 - n\chi + \chi u g^{ij}u_{ij}.$$

由极小曲面方程 $g^{ij}u_{ij} = 0$ ，上式简化为

$$g^{ij}\Psi_{ij} = r\chi'|\nabla_g r|^2 - n\chi.$$

代入 g^{ij} 的表达式：

$$|\nabla_g r|^2 = g^{ij}r_i r_j = \frac{g^{ij}(x_i + u_i u)(x_j + u_j u)}{r^2} = \frac{|x|^2 + u^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{u}{v} + \frac{\sum_i u_i x_i}{v} \right)^2 \leq 1.$$

从而有

$$g^{ij}\Psi_{ij} \leq r\chi' - n\chi.$$

乘以 w 并在曲面上积分得

$$\int_{B_1} w g^{ij}\Psi_{ij} v dx \leq \int_{B_1} w (r\chi' - n\chi) v dx. \quad (5)$$

另一方面，对右端项分部积分并利用 $g^{ij}w_{ij} \geq 0$ ：

$$\int_{B_1} w g^{ij}\Psi_{ij} v dx = \int_{B_1} (w g^{ij}v)_j \Psi_i dx.$$

由 (3) 和极小曲面方程 (2) 知 $\sum_j (g^{ij}v)_j = 0$ ，再分部积分可得

$$\int_{B_1} w g^{ij}\Psi_{ij} v dx = \int_{B_1} w_j g^{ij}v \Psi_i dx = \int_{B_1} w_{ji} g^{ij}v \Psi dx \geq 0. \quad (6)$$

结合 (5) 和 (6) 得到

$$0 \leq \int_{B_1} w r \chi' v - n \chi w v dx \leq \int_{B_1} w \rho \chi' v - n \chi w v dx = \rho^{n+1} \frac{d}{d\rho} \left(\int_{B_1} \frac{w \chi (\rho - r)}{\rho^n} v dx \right).$$

因此对 $\delta \leq R$ 有

$$\int_{B_1} \frac{w \chi (\delta - r)}{\delta^n} v dx \leq \int_{B_1} \frac{w \chi (R - r)}{R^n} v dx.$$

令 χ 逼近特征函数 $\chi_{(0,+\infty)}$ ，得

$$\int_{B_\delta} \frac{w v}{\delta^n} dx \leq \int_{B_R} \frac{w v}{R^n} dx.$$

最后令 $\delta \rightarrow 0$ ，得

$$w(0) \leq C(n) \int_{B_{\frac{1}{4}}} w v dx \leq C(n) \int_{B_{\frac{1}{4}}} w v dx.$$

步骤 3：面积估计

本步骤的目标是证明在局部球 $B_{\frac{1}{2}}$ 上, 面积元 $v = \sqrt{1 + |Du|^2}$ 的积分有界, 且该界仅依赖于 n 和 $\sup |u|$:

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} v \, dx \leq C(n, \sup |u|).$$

利用恒等式 $v = \frac{1+|Du|^2}{v}$, 将积分展开:

$$\int v \, dx = \int \frac{1}{v} \, dx + \int \frac{|Du|^2}{v} \, dx.$$

由于 $v \geq 1$, 第一项 $\int_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{1}{v} \, dx$ 显然由区域的体积 (即 $C(n)$) 控制.

选取截断函数 $\eta \in C_0^\infty(B_1)$, 满足 $0 \leq \eta \leq 1$ 且在 $B_{\frac{1}{2}}$ 上 $\eta \equiv 1$. 考虑第二项的加权积分, 并利用分部积分:

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \frac{|Du|^2}{v} \, dx \leq \int_{B_1} \eta \frac{|Du|^2}{v} \, dx = \int_{B_1} \sum_i \eta u_i \left(\frac{u_i}{v} \right) \, dx.$$

对上式关于 u_i 分部积分 (将导数从 u_i 转移到其他项):

$$\int_{B_1} \sum_i \eta u_i \left(\frac{u_i}{v} \right) \, dx = - \int_{B_1} u \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{u_i}{v} \right) \, dx.$$

展开右侧的导数项:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{u_i}{v} \right) = \sum_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{u_i}{v} + \sum_i \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{v} \right).$$

由极小曲面方程的散度形式:

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{v} \right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_i}{v} \right) = 0,$$

因此上式中的第二项消失, 化简为

$$\int_{B_1} \eta \frac{|Du|^2}{v} \, dx = - \int_{B_1} u \sum_i \left(\frac{u_i}{v} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \, dx.$$

利用模长不等式 $|\frac{Du}{v}| = \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} < 1$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \eta \frac{|Du|^2}{v} \, dx &\leq \int_{B_1} |u| \cdot \left| \frac{Du}{v} \right| \cdot |\nabla \eta| \, dx \\ &\leq \sup_{B_1} |u| \cdot \int_{B_1} |\nabla \eta| \, dx \\ &\leq C \cdot \sup |u|. \end{aligned}$$

结合以上不等式, 我们得到

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} v \, dx \leq C (1 + \sup |u|).$$

该估计表明极小曲面的面积可以由其边界高度（通过最大值原理延伸到内部的 u ）来控制。

步骤 4：约化到面积估计

步骤 2 的平均值不等式将点态估计转化为积分估计，本步骤将进一步把 $\int_{B_{\frac{1}{4}}} wv dx$ 约化为面积 $\int_{B_{\frac{1}{2}}} v dx$ ，从而利用步骤 3 的面积估计完成证明。

目标是证明以下估计：

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}(0)} w(x)v(x) dx \leq C(n, \sup_{B_1} |u|).$$

选取截断函数 $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{2}})$ ，满足

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta \equiv 1 \text{ 在 } B_{1/4} \text{ 上}, \quad |\nabla \eta| \leq C.$$

在 $B_{\frac{1}{2}}$ 内考虑积分。

利用恒等式 $v = \frac{1+|Du|^2}{v} = \frac{1}{v} + \frac{|Du|^2}{v}$ ，将积分拆分为

$$\int_{B_{\frac{1}{4}}} wv dx \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta wv dx = \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta \frac{w}{v} dx + \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta w \frac{|Du|^2}{v} dx.$$

由于 $v = \sqrt{1+|Du|^2} \geq 1$ 且 $w = \ln v$ ，项 $\frac{w}{v}$ 是有界的，因此第一项

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta \frac{w}{v} dx \leq C.$$

关键在于处理第二项 $\int \eta w \frac{|Du|^2}{v} dx$ 。注意到 $\frac{|Du|^2}{v} = Du \cdot \left(\frac{Du}{v}\right)$ ：

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta w \left(Du \cdot \frac{Du}{v} \right) dx = \int_{B_{\frac{1}{2}}} (\eta w Du) \cdot \frac{Du}{v} dx.$$

利用分部积分，并结合极小曲面方程 $\operatorname{div} \left(\frac{Du}{v} \right) = 0$ ：

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} (\eta w u_i) \frac{u_i}{v} dx = - \int_{B_{\frac{1}{2}}} u \operatorname{div} \left(\eta w \frac{Du}{v} \right) dx.$$

展开散度项：

$$\operatorname{div} \left(\eta w \frac{Du}{v} \right) = w \frac{Du}{v} \cdot \nabla \eta + \eta \frac{Du}{v} \cdot \nabla w + \eta w \operatorname{div} \left(\frac{Du}{v} \right).$$

由于最后一项为零，我们得到

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta w \frac{|Du|^2}{v} dx = - \int_{B_{\frac{1}{2}}} u w \frac{Du}{v} \cdot \nabla \eta dx - \int_{B_{\frac{1}{2}}} u \eta \frac{Du}{v} \cdot \nabla w dx.$$

利用 $|\frac{Du}{v}| \leq 1$ ：

1. 第一项: $|\int u w \frac{Du}{v} \cdot \nabla \eta| \leq \sup |u| \int |\nabla \eta| w dx \leq C \int v dx$ (因为 $w \leq Cv$)。
2. 第二项: 利用 Hölder 不等式处理包含 ∇w 的项:

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_{\frac{1}{2}}} u \eta \frac{Du}{v} \cdot \nabla w \right| &\leq \sup |u| \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta |\nabla w| dx \\ &\leq C \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta \sqrt{g^{ij} w_i w_j} v dx \\ &\leq \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 g^{ij} w_i w_j v dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} v dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

结合步骤 3 的面积估计得到

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta w \frac{|Du|^2}{v} dx \leq C \left(\int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 g^{ij} w_i w_j v dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此我们只需估计积分 $II := \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 g^{ij} w_i w_j v dx$ 。

利用步骤 1 得到的不等式 $g^{ij} w_{ij} \geq g^{ij} w_i w_j$, 有

$$II \leq \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 g^{ij} w_{ij} v dx.$$

然后分部积分并利用 Young 不等式:

$$\begin{aligned} II &\leq - \int_{B_{\frac{1}{2}}} 2\eta \eta_j g^{ij} w_i v dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_{\frac{1}{2}}} \eta^2 g^{ij} w_i w_j v dx + 2 \int_{B_{\frac{1}{2}}} g^{ij} \eta_i \eta_j v dx. \end{aligned}$$

将上式第一项移到左边得

$$II \leq 4 \int_{B_{\frac{1}{2}}} g^{ij} \eta_i \eta_j v dx \leq C \int_{B_{\frac{1}{2}}} v dx.$$

最后, 由步骤 3 的面积估计得到 $II \leq C$, 从而定理得证。 $\square$

第十讲：极小曲面的 Bernstein 定理

9.1 定理陈述与历史背景

定理 9.1 (Bernstein, 1917). 设 $\Sigma = (x, u(x)) \subset \mathbb{R}^{2+1}$ 是整体定义的极小图 (*minimal graph*), 即 u 满足极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上.}$$

u 必为线性函数, 从而 Σ 是一个平面。

高维推广与历史线索:

- **Bernstein (1917)**: 证明了 $n = 2$ 的情形。
- **Fleming (1962)**: 给出 $n = 2$ 的新证明, 指出若 $\mathbb{R}^3$ 中不存在非平面的面积最小锥, 则定理成立。
- **De Giorgi (1965)**: 证明若 $\mathbb{R}^n$ 中无非平凡的最小锥, 则 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 Bernstein 定理成立, 由此得到 $n = 3$ 。
- **Almgren (1966)**: 证明 $\mathbb{R}^4$ 中不存在非平面最小锥, 定理推广至 $n = 4$ 。
- **Simons (1968)**: 证明 $\mathbb{R}^7$ 中不存在非平面最小锥, 从而成立至 $n = 7$; 同时他在 $\mathbb{R}^8$ 中发现了局部稳定锥 (Simons 锥)。
- **Bombieri, De Giorgi, Giusti (1969)**: 证明 Simons 锥是全局面积最小的, 并由此构造了 $n \geq 8$ 时的非线性极小图。

综上, Bernstein 定理的最终形式为:

定理 9.2. 若 $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上整体成立, 且 $2 \leq n \leq 7$, 则 u 是线性的。

注记 9.1. 本笔记给出的证明源自 *Schoen–Simon–Yau (Acta Math., 1975)*, 他们利用 Moser 迭代证明了 $2 \leq n \leq 5$ 的情形。对于 $n = 6, 7$ 的情形需要更精细的几何测度论或稳定性分析。

9.2 预备知识

设 $\Sigma = \{(x, u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的极小图。引进以下记号：

- 诱导度量 $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$, 逆度量 $g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{u_i u_j}{v^2}$, 其中 $v = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$ 。
- 第二基本形式 $h_{ij} = \frac{u_{ij}}{v}$, 其模平方

$$|A|^2 = g^{ik} g^{j\ell} h_{ij} h_{k\ell} = \frac{1}{v^2} g^{k\ell} g^{ij} u_{ki} u_{\ell j}.$$

- 极小曲面方程等价于平均曲率消失： $g^{ij} h_{ij} = 0$ 。
- 定义辅助函数 $w = \log v = \frac{1}{2} \log(1 + |\nabla u|^2)$ 。通过直接计算（或由极小图的结构）可得重要的恒等式

$$\Delta_g w - |\nabla_g w|^2 = |A|^2, \quad (1)$$

其中 Δ_g 和 ∇_g 是曲面上的 Laplace 算子和梯度。

另一个关键工具是 Simons 不等式（证明概要见第 9.10 节）：

引理 9.1 (Simons 不等式). 对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维极小超曲面，成立

$$\frac{1}{2} \Delta_\Sigma |A|^2 \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla^\Sigma |A||^2 - |A|^4, \quad (2)$$

这里 Δ_Σ 与 ∇^Σ 表示曲面上的 Laplace 与梯度。

9.3 Schoen–Simon–Yau 的证明 ($n \leq 5$)

目标是证明 $|A| \equiv 0$ ，从而第二基本形式为零，曲面为平面。

9.4 截断函数与体积增长

令 $B_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为以原点为中心、半径为 R 的欧氏球，定义

$$\Sigma_R = \Sigma \cap B_R.$$

由于 Σ 是极小图，其面积满足体积增长估计：存在常数 $C(n) > 0$ 使得

$$|\Sigma_R| \leq C(n) R^n.$$

选取截断函数 $\phi \in C_0^\infty(B_R)$ ，满足 $0 \leq \phi \leq 1$ ，且在 $B_{R/2}$ 上 $\phi \equiv 1$ ，并且 $|\nabla \phi| \leq C/R$ 。为方便起见，我们会在积分中令测试函数为 ϕ 的幂次。

9.5 首次尝试的失败

如果直接对 (1) 乘以 φ^2 (φ 为紧支光滑函数) 并积分，可得

$$\int_{\Sigma_R} \varphi^2 |A|^2 = - \int_{\Sigma_R} 2\varphi \nabla \varphi \cdot \nabla w - \int_{\Sigma_R} \varphi^2 |\nabla w|^2 \leq \int_{\Sigma_R} |\nabla \varphi|^2.$$

取标准的截断函数，右边量级约为 $|\Sigma_R|/R^2 \sim R^{n-2}$ ，当 $R \rightarrow \infty$ 时发散，无法得到任何衰减。这提示我们需要更高阶的迭代。

9.6 引入参数 q 的主要估计

转而考虑对 $|A|^{q+2}$ 进行估计。在 (1) 两边乘以 $\varphi|A|^q$ (φ 待定) 并在 Σ_R 上分部积分:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_R} \varphi|A|^{q+2} &= \int \varphi|A|^q \Delta_g w - \int \varphi|A|^q |\nabla_g w|^2 \\ &= - \int |A|^q \nabla \varphi \cdot \nabla w - q \int \varphi|A|^{q-1} \nabla|A| \cdot \nabla w - \int \varphi|A|^q |\nabla w|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

对前两项应用 Young 不等式 (用常数 $a, b > 0$ 待定):

$$- \int |A|^q \nabla \varphi \cdot \nabla w \leq a \int \varphi|A|^q |\nabla w|^2 + \frac{1}{4a} \int \frac{|A|^q}{\varphi} |\nabla \varphi|^2, \quad (4)$$

$$-q \int \varphi|A|^{q-1} \nabla|A| \cdot \nabla w \leq b \int \varphi|A|^q |\nabla w|^2 + \frac{q^2}{4b} \int \varphi|A|^{q-2} |\nabla|A||^2. \quad (5)$$

将 (4)-(5) 代入 (3), 并令

$$I := \frac{1}{4a} \int \frac{|A|^q}{\varphi} |\nabla \varphi|^2, \quad II := \frac{q^2}{4b} \int \varphi|A|^{q-2} |\nabla|A||^2,$$

得到

$$\int_{\Sigma_R} \varphi|A|^{q+2} \leq (a+b-1) \int \varphi|A|^q |\nabla w|^2 + I + II. \quad (6)$$

如果我们选取 $a+b \leq 1$, 则右边第一项非正, 可丢弃, 从而

$$\int_{\Sigma_R} \varphi|A|^{q+2} \leq I + II. \quad (7)$$

9.7 估计 I 与 II

项 I 的处理

由 Hölder 不等式,

$$I = \frac{1}{4a} \int \frac{|A|^q}{\varphi} |\nabla \varphi|^2 \leq \frac{1}{4a} \left(\int \varphi|A|^{q+2} \right)^{\frac{q}{q+2}} \left(\int \frac{|\nabla \varphi|^{q+2}}{\varphi^{q+1}} \right)^{\frac{2}{q+2}}.$$

再利用 Young 不等式 (引进小参数 $\varepsilon > 0$) 得

$$I \leq \varepsilon \int \varphi|A|^{q+2} + \frac{C_1}{\varepsilon^{q/2}} \int \frac{|\nabla \varphi|^{q+2}}{\varphi^{q+1}},$$

其中 C_1 仅依赖于 a, q 。

为消去分母中的 φ , 取 $\varphi = \phi^p$ 并选择 $p = q+2$, 直接计算有

$$\frac{|\nabla \varphi|^{q+2}}{\varphi^{q+1}} = (q+2)^{q+2} |\nabla \phi|^{q+2}.$$

因此,

$$I \leq \varepsilon \int \phi^{q+2} |A|^{q+2} + C_2(\varepsilon, q) \int |\nabla \phi|^{q+2}. \quad (8)$$

项 II 的处理 (利用 Simons 不等式)

由引理 9.1, 将不等式乘以 $\frac{1}{1+2/n}\varphi|A|^{q-2}$ 得

$$\int \varphi|A|^{q-2}|\nabla|A||^2 \leq \frac{1}{1+2/n} \int \varphi|A|^{q+2} + \frac{1}{2(1+2/n)} \int \varphi|A|^{q-2}\Delta_{\Sigma}|A|^2.$$

对最后一项分部积分:

$$\begin{aligned} \int \varphi|A|^{q-2}\Delta_{\Sigma}|A|^2 &= - \int \nabla(\varphi|A|^{q-2}) \cdot \nabla|A|^2 \\ &= -2 \int |A|^{q-1} \nabla\varphi \cdot \nabla|A| - 2(q-2) \int \varphi|A|^{q-2}|\nabla|A||^2. \end{aligned}$$

于是

$$II \leq \frac{q^2}{4b(1+2/n)} \int \varphi|A|^{q+2} - \frac{q^2}{4b(1+2/n)} \int |A|^{q-1} \nabla\varphi \cdot \nabla|A| - \frac{q^2(q-2)}{4b(1+2/n)} \int \varphi|A|^{q-2}|\nabla|A||^2.$$

再次对交叉项应用 Young 不等式 (常数 $\delta > 0$):

$$- \int |A|^{q-1} \nabla\varphi \cdot \nabla|A| \leq \delta(1 + \frac{2}{n}) \int \varphi|A|^{q-2}|\nabla|A||^2 + \frac{1}{4\delta(1 + \frac{2}{n})} \int \frac{|A|^q}{\varphi} |\nabla\varphi|^2.$$

将此项估计带入, 并注意到 $II = \frac{q^2}{4b} \int \varphi|A|^{q-2}|\nabla|A||^2$, 整理后可得

$$\left(1 + \frac{q-2}{1+2/n} - \delta\right) II \leq \frac{1}{4\delta(1+2/n)^2} \frac{q^2}{4b} \int \frac{|A|^q}{\varphi} |\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{1+2/n} \frac{q^2}{4b} \int \varphi|A|^{q+2}. \quad (9)$$

这里为保证系数为正, 需假设

$$1 + \frac{q-2}{1+2/n} - \delta > 0. \quad (10)$$

9.8 合成迭代不等式

将 II 的估计 (9) 代入 (7), 并将所有含 $\int \varphi|A|^{q+2}$ 的项移至左边, 得到

$$c_1 \int \varphi|A|^{q+2} \leq c_2 I,$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &:= 1 - \frac{q^2}{4b(1+2/n)(1 + \frac{q-2}{1+2/n} - \delta)}, \\ c_2 &:= 1 + \frac{4aq^2}{16b(1+2/n)^2\delta(1 + \frac{q-2}{1+2/n} - \delta)}. \end{aligned}$$

再利用 I 的估计 (8) (取 $\varphi = \phi^{q+2}$), 可得

$$c_1 \int_{\Sigma_R} \phi^{q+2}|A|^{q+2} \leq \varepsilon c_2 \int_{\Sigma_R} \phi^{q+2}|A|^{q+2} + C \int_{\Sigma_R} |\nabla\phi|^{q+2}.$$

即

$$(c_1 - \varepsilon c_2) \int_{\Sigma_R} \phi^{q+2}|A|^{q+2} \leq C \int_{\Sigma_R} |\nabla\phi|^{q+2}. \quad (11)$$

9.9 参数选取与极限过程

选取测试函数 ϕ 使得 $|\nabla\phi| \leq C/R$, 结合面积增长 $|\Sigma_R| \leq CR^n$, 右端被

$$C \int_{\Sigma_R} |\nabla\phi|^{q+2} \leq C' R^{n-q-2}$$

控制。

因此, 若我们能选取参数使得 $c_1 - \varepsilon c_2 > 0$ 且 $n < q + 2$, 则当 $R \rightarrow \infty$ 时便有

$$\int_{\Sigma_{R/2}} |A|^{q+2} \leq \int_{\Sigma_R} \phi^{q+2} |A|^{q+2} \rightarrow 0,$$

从而 $|A| \equiv 0$ 。

现在验证存在满足要求的参数。取 $a = \delta$, $b = 1 - \delta$, $\varepsilon = \delta^2$, 并令 $\delta \rightarrow 0^+$ 。条件 (10) 在 δ 很小时自然成立。此时

$$c_1 \rightarrow 1 - \frac{q^2}{4(1 + 2/n)(1 + \frac{q-2}{1+2/n})},$$

c_2 保持有界。故只要

$$1 - \frac{q^2}{4(1 + 2/n + q - 2)} > 0,$$

即

$$q^2 < 4\left(q + \frac{2}{n} - 1\right),$$

通过求解二次不等式得到

$$2 - 2\sqrt{\frac{2}{n}} < q < 2 + 2\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

同时还需满足 $n - 2 < q$ (来自 $n < q + 2$)。因此存在 q 当且仅当

$$n - 2 < 2 + 2\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

直接验证: $n = 2, 3, 4, 5$ 时不等式成立; $n = 6$ 时 $4 < 2 + 2/\sqrt{3} \approx 3.15$ 不成立。于是整个过程适用于 $2 \leq n \leq 5$ 。

综上, 对 $2 \leq n \leq 5$ 的整体极小图, $|A| \equiv 0$, 曲面必为平面。□

9.10 几何引理与补充

这里简要给出引理 9.1 的推导思路。对于极小图 $\Sigma = (x, u(x))$, 由极小曲面方程 $g^{ij}h_{ij} = 0$ 求导可得 $g^{ij}h_{ij,k} = 0$ 以及二阶导数的关系。结合 Ricci 恒等式

$$h_{ij,kl} - h_{ij,lk} = \sum_m (h_{mj}R_{iklm} + h_{im}R_{jklm})$$

(其中 R 为曲率张量), 并在图上具体计算, 最终可整理出

$$\frac{1}{2}\Delta_\Sigma |A|^2 = |\nabla^\Sigma A|^2 - |A|^4.$$

再利用 Kato 不等式 $|\nabla^\Sigma A|^2 \geq (1 + \frac{2}{n})|\nabla^\Sigma A|^2$, 即得所需的不等式。