胡大川先生幻想詩

浮沉道力未能堅世網攖人
只自憐四海應無極樂國九
霄豈有寄愁天無聊一作非
々想適意真堪惘々然誰解去

第三章 存在和唯一性定理

3.1 预备知识

1. "Grönwall"不等式

引理 (Lemma)：设 $f,g\in C[a,b]$，且 $g\ge 0$，另有常数 $c\in\mathbb{R}$，若对任意的 $x\in[a,b]$，

$$f(x)\le c+\int_a^x g(s)f(s)\,ds,\quad 则\quad f(x)\le c\,e^{\int_a^x g(s)\,ds}.$$

证明 (Proof)：设 $\Phi(x)=\int_a^x g(s)f(s)\,ds$. 则 $\Phi'(x)=g(x)f(x)\le \underbrace{g(x)}_{(\ge 0)\text{ 不改变不等号方向}}(c+\Phi(x))$

$$\Rightarrow\ \Phi'(x)-g(x)\Phi(x)\le c\cdot g(x)\qquad (*).$$

利用积分因子法. $(*)$式两边同乘 $\mu(x)=e^{-\int_a^x g(s)\,ds}$ $\left(\frac{\mu'}{\mu}=-g\right)$

有 $(\Phi(x)\mu(x))'\le c\,g(x)\mu(x)$.

$$\Phi(x)\mu(x)-\underbrace{\Phi(a)\mu(a)}_{=0}=\int_a^x(\Phi(s)\mu(s))'\,ds\le c\int_a^x \underbrace{g(s)\mu(s)}_{-\mu'}\,ds \Leftrightarrow \Phi(x)\mu(x)\le c(\underbrace{\mu(a)}_{=1}-\mu(x))$$

$$\Phi(x)\le\frac{c(1-\mu(x))}{\mu(x)}=c\left(e^{\int_a^x g(s)\,ds}-1\right)$$

$$f(x)\le\Phi(x)+c=c\,e^{\int_a^x g(s)\,ds}\qquad \square.$$

推论：$c\le 0$. $f(x)\ge 0\ \Rightarrow\ f\equiv 0$

---

2. "Arzelà–Ascoli 定理" (AA) "退化"版本. ～反过来也成立!

引理 3.2. 设 $\{f_n\}\subseteq C[a,b]$，满足：

① 一致有界性. ② 等度连续性.

则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

$\exists M>0$. $\forall n\in\mathbb{N}$. $x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)|\le M$.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,y\in[a,b]$. $\forall n\in\mathbb{N}$. $|x-y|<\delta\Rightarrow|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$

证明：设 $[a,b]$ 中全体有理数为 $r_1, r_2,\cdots$

先考虑 $\{f_n(r_1)\}$. 它是有界点列. 由 BW (聚点定理). 一定有收敛子列. 记为 $\{f_n^{(1)}(r_1)\}$.

再考虑 $\{f_n^{(1)}(r_2)\}$. 也是有界点列 $\Rightarrow$ 收敛子列 $\{f_n^{(2)}(r_2)\}$. ……

最终得到一串子列. $\{f_n\}\supseteq\{f_n^{(1)}\}\supseteq\{f_n^{(2)}\}\supseteq\cdots$

满足 $\{f_n^{(k)}(r_k)\}$ 收敛

最后. 取. $g_n(x)=f_n^{(n)}(x)$

$$\begin{matrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & \cdots \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & \cdots \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

"对角线技巧"

对于每个 r_k. $g_n(r_k) = f_n^{(n)}(r_k)$ $n=1,2,\cdots$

当 $n>k$ 时 $\{f_m^{(n)}(r_k)\}$, $m=1,2,\cdots$

是 $\{f_m^{(k)}(r_k)\}$ 的子列. 于是 $\{f_m^{(n)}(r_k)\}$ 收敛 $(m\to\infty)$.

$\{g_n(r_k)\}$ 又是 $\{f_m^{(n)}(r_k)\}$ 的子列 ∴ 也收敛.

即 $\{g_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 的所有有理点上收敛.

下证: $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,

即 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$ $\forall n,m>N$, $\forall x\in[a,b]$, $|g_n(x)-g_m(x)|<\varepsilon$.

由②. 对于上述 $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. s.t 当 $|x-y|<\delta$ 时.

对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (*)

有限覆盖

因为 $[a,b]$ 是紧的. 所以存在一些有理数 $\hat{r}_1\cdots\hat{r}_{m'}$, s.t $[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{m'}B(\hat{r}_i,\delta)$ $\left([a,b]\subset\bigcup_{x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}}B(x,\delta)\right)$

因为 $\{g_n(\hat{r}_i)\}_{i=1,2,\cdots,m'}$ 收敛. 所以存在 $N_i\in\mathbb{N}$. s.t $n,m>N_i$ 时

有 $|g_n(\hat{r}_i)-g_m(\hat{r}_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $i=1,2,\cdots m'$ (☆)

最后取 $N=\max\{N_1,\cdots N_{m'}\}$. 对 $\forall x\in[a,b]$, 不妨设 $x\in B(\hat{r}_1,\delta)$. 则.

对于 $\forall n,m>N$. $|g_n(x)-g_m(x)|\le \underbrace{|g_n(x)-g_n(\hat{r}_1)|}_{(*)\ <\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{|g_n(\hat{r}_1)-g_m(\hat{r}_1)|}_{(☆)\ <\frac{\varepsilon}{3}}+\underbrace{|g_m(\hat{r}_1)-g_m(x)|}_{(*)\ <\frac{\varepsilon}{3}}<\varepsilon$

$\boxed{\text{Q.D.E}}$

$f_n:[a,b]\Rightarrow\mathbb{R}$.

"范数"

推广1: $f_n:[a,b]\to(\mathbb{R}^d,\|\cdot\|)$

推广2: $[a,b]\rightsquigarrow\mathbb{R}^d$ 中的紧集.

3.2 Picard 定理.

记号: $I=[x_0-a,x_0+a]\subseteq\mathbb{R}$, $a>0$, $x_0\in\mathbb{R}$. (或 $[x_0,x_0+a]$, $[x_0-a,x_0]$).

$K=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|y-y_0\|\le b\}$. $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上给定的一个范数. $y_0\in\mathbb{R}^n$

$D=I\times K$, $f: D\to(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ 连续.

考虑
$$(*)\begin{cases} y'=f(x,y). \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

定义: 若存在 $L>0$. s.t $\forall x\in I$, $y_1,y_2\in K$, $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le L\|y_1-y_2\|$.

则称 f 满足关于 y 的 Lipschitz 条件 (L条件).

Remark: ① "L条件" $\Rightarrow$ 连续

② 若 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在. 且定义域上连续. 则 f 满足"L条件" $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$

$f\in C(I\times K,\mathbb{R}^n)$. 线性变换

$\frac{\partial f}{\partial y}\in C(I\times K,\ L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$

算子范数

$(L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\ \|\cdot\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)})$

度量空间 ⇒ 可讨论连续性

$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\| \le \underset{(x,\xi)\in D}{\max} \|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\| \cdot \|y_1-y_2\|$ （多元微分学·有限增量定理）

Jacobi矩阵算子范数在此区域的最大值 $:=L$

Thm (Picard) — 不动点法.

f 满足 L 条件. ($L>0$). 设 $\underset{(x,y)\in D}{\max}\|f\| = M$. 记 $\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$. 则 (*)

取法保证了迭代结果总在定义域内.

则在 $J=[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 上存在唯一解。

证明：首先 (*) 等价于以下的积分方程

$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$ （向量值函数积分）. ① y_n 是良定义？ ② y_n 连续.

构造函数列 $\{y_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$ $(x\in J)$ ~ Picard序列 $y_0(x)=y_0$.

$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))\,dt$ (a)

$f: I\times K \to \mathbb{R}^n$?
$[x_0,x]\subseteq I$?
$y_n\in K$?

因为 $\alpha<a$ $\therefore x\in I$

$\|y_n(x)-y_0\| \le \int_{x_0}^{x}\|f(t,y_{n-1}(t))\|dt \le M|x-x_0| \le b$ 　 $\underbrace{|x-x_0|\le\alpha\le\frac{b}{M}}$ 对比大小.

目标：$\{y_n\}$ 在 J 上一致收敛到 ϕ （$y_n \rightrightarrows \phi$）.

$\|z_n(x)-z_m(x)\| < L\|y_n(x)-y_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{L}\cdot L=\varepsilon$. 一致收敛.

一致收敛函数列. $\lim$ 与 $\int$ 换序

若 $y_n\rightrightarrows\phi$. 则对 (a) 取极限. $\phi(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\underbrace{f(t,\phi_n(t))}_{z_n(t)}dt = y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))\,dt$

$\therefore \phi(t)$ 即为满足方程的解

事实. 若 $y_n\rightrightarrows\phi$. 则 $z_n(x)=f(\underset{\in I}{x},\underset{\in K}{y_n(x)})$. 有 $z_n(x)\rightrightarrows f(x,\phi(x))$

下证：一致收敛

首先 $y_0(x)=y_0$. $\|y_1(x)-y_0(x)\|=\|\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)dt\| \le M|x-x_0|$ ($n=1$ ✓).

用归纳证明 $\|y_n(x)-y_{n-1}(x)\| \le \frac{1}{n!}L^{n-1}\cdot M\cdot|x-x_0|^n$

设 $n-1$ ✓. 考虑 n 情况. (不妨设 $x>x_0$)

$\|y_n(x)-y_{n-1}(x)\| = \|\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))\,dt\| \le \int_{x_0}^{x}\|\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))\,dt\|$

$\le \int_{x_0}^{x} L\|y_{n-1}(t)-y_{n-2}(t)\|\,dt$.

由归纳假设 $LHS \le \int_{x_0}^{x} L\frac{L^{n-2}}{(n-1)!}M|t-x_0|^{n-1}dt$

$= \frac{L^{n-1}}{n!}M|x-x_0|^n$

于是 $y_n(x)=y_0+(y_1-y_0)+\cdots+(y_n-y_{n-1})$ "看作无穷级数前n项部分和"

- $\|y_n(x)-y_{n-1}(x)\| \le \frac{1}{n!}L^{n-1}M|x-x_0|^n \le \frac{1}{n!}L^{n-1}M\alpha^n$
- $\sum_{n>0}\frac{1}{n!}L^{n-1}M|x-x_0|^n = \frac{M}{L}e^{L|x-x_0|}$ 收敛 $\left(\frac{M}{L}(e^{L\alpha}-1)\text{收敛}\right)$

$\therefore$ 由 Weierstrass 判别法 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛到某个 $\phi(x)$.

唯一性：$\phi_1 \cdot \phi_2$ 两解．$(x>x_0)$

$\|\phi_1(x)-\phi_2(x)\| \le \int_{x_0}^{x}\|f(t,\phi_1)-f(t,\phi_2)\|dt \le \int_{x_0}^{x} L\|\phi_1(t)-\phi_2(t)\|dt.$

由 Gronwall 不等式．取 $C=0$．$g=L$．$f=\|\phi_1-\phi_2\|$

$\Rightarrow f\equiv 0$．即 $\phi_1=\phi_2$．∴ 唯一性．

向量值函数相关补充：

V关于范数完备 (Banach Space).

V：$\mathbb{R}$－线性空间 $\|\cdot\|$：V上的一个范数．$f:[a,b]\to V$．$A\in V$．Let $I=[a,b]$

若对 $\forall\varepsilon>0$．$\exists\delta>0$．s.t 对 I 的任一划分：$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$．

以及标记点组 $\xi=\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$　$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$．

只要 $\lambda(P)=\max\{x_i-x_{i-1}\mid i=1,2,\cdots,n\}<\delta$．

有 $\|S(f,P,\xi)-A\|<\varepsilon$．其中．$S(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积．$A=\int_a^b f(x)dx$

引理（Cauchy 准则）$f\in \mathcal{R}([a,b],V)$（黎曼可积）$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ $\forall P_1,P_2,\xi_1,\xi_2$．$\lambda(P_1)<\delta$．$\lambda(P_2)<\delta$

$\Rightarrow \|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)\|<\varepsilon$．

证明："$\Rightarrow$"　Obviously!

"$\Leftarrow$" 对于 $n\in\mathbb{N}$，设 P_n 是 I 的 n 等分 $P_n=\{x_{n,0}<\cdots<x_{n,n}\}$．$x_{n,i}=a+\frac{b-a}{n}i$

$\xi_n=\{\xi_{n,i}\mid i=1,2,\cdots,n\}$．$\xi_{n,i}=x_{n,i}$

- $S_n=S(f,P_n,\xi_n)$

$\forall\varepsilon>0$，找到 $\delta>0$．满足 Cauchy 准则．取 $N\in\mathbb{N}$．s.t $\frac{b-a}{N}<\delta$．

则对 $\forall n,m>N$．$\lambda(P_n)=\frac{b-a}{n}<\delta$．　$\lambda(P_m)<\delta$．

于是 $\|S_n-S_m\|<\varepsilon$

因此 $\{S_n\}$ 是 $(V,\|\cdot\|)$ 中的 Cauchy 列．所以存在 $A=\lim_{n\to\infty}S_n$

对于一个 $\varepsilon>0$．$\exists N\in\mathbb{N}$．s.t $\forall n>N$．$\|S_n-A\|<\frac{\varepsilon}{2}$．　①

接下来利用 Cauchy 准则．

取 $\delta>0$，s.t …… $\|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)\|<\frac{\varepsilon}{2}$；

则对 $\forall P,\xi$，$\lambda(P)<\delta$．

取 $n>N$．且 $\frac{b-a}{n}<\delta$．则 $\lambda(P_n)<\delta$．于是 $\|S(f,P,\xi)-S_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$．　②

①②得 $\|S(f,P,\xi)-A\|<\varepsilon$　□．

定理：若 $f\in C([a,b],V)$，则 $f\in R([a,b],V)$.　（连续函数是黎曼可积的）

证明：连续 $\Rightarrow$ 一致连续

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x,y\in[a,b]$，$|x-y|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

现在对于两个分划 P_1, P_2，$\lambda(P_1)<\delta$，$\lambda(P_2)<\delta$.

记 $\hat{P}=P_1\cup P_2$（记 $\hat{P}$ 的小区间是 $\hat{I}_i$　$i=1,\cdots,\hat{n}$）

对于 P_1 的一个标记点组 ξ_1，加入一些点，得到一个 $\hat{P}$ 的标记点组 $\hat{\xi}_1$

黎曼和

$$S(f,\hat{P},\hat{\xi}_1)-S(f,P_1,\xi_1)=\sum_{i=1}^{\hat{n}}f(\hat{\xi}_i)|\hat{I}_i|-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)|I_i| \quad (*)$$

对于 $i=1,\cdots,\hat{n}$，记 $\tilde{i}$ 为 $\hat{I}_i$ 所在的 $I_{\tilde{i}}$ 的下标 $\tilde{i}$.

于是 $|I_k|=\sum_{\tilde{i}=k}\hat{I}_i$　　$\therefore (*)=\sum_{i=1}^{\hat{n}}f(\hat{\xi}_i)|\hat{I}_i|-\sum_{i=1}^{\hat{n}}f(\xi_{\tilde{i}})|\hat{I}_i|$

$$=\sum_{i=1}^{\hat{n}}\left(f(\hat{\xi}_i)-f(\xi_{\tilde{i}})\right)|\hat{I}_i|$$

因为 $\hat{\xi}_i\in I_{\tilde{i}}$，$\xi_{\tilde{i}}\in I_{\tilde{i}}$，所以 $|\hat{\xi}_i-\xi_{\tilde{i}}|<\delta$.

$$\therefore \|f(\hat{\xi}_i)-f(\xi_{\tilde{i}})\|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\|S(f,\hat{P},\hat{\xi}_1)-S(f,P_1,\xi_1)\|\le\sum_{i=1}^{\hat{n}}\frac{\varepsilon}{3(b-a)}|\hat{I}_i|=\frac{\varepsilon}{3}$$

同理，在 ξ_2 中添加一些点，得 $\hat{P}$ 的标记点组 $\hat{\xi}_2$

可得 $\|S(f,\hat{P},\hat{\xi}_2)-S(f,P_2,\xi_2)\|<\frac{\varepsilon}{3}$.

$$\|S(f,\hat{P},\hat{\xi}_1)-S(f,\hat{P},\hat{\xi}_2)\|\le\sum_{i=1}^{\hat{n}}\|f(\hat{\xi}_{1,i})-f(\hat{\xi}_{2,i})\||\hat{I}_i|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$\therefore \Rightarrow \|S(f,P_1,\xi_1)-S(f,P_2,\xi_2)\|<\varepsilon$.　□

定理：若 V 是有限维的（$\dim V=d$）　$V=\mathbb{R}^d$.

$f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_d\end{pmatrix}$，则 $f\in R([a,b],V) \Leftrightarrow f_i\in R([a,b],V)$，$i=1,2,\cdots,d$. 且 $\int_a^b f(x)dx=\begin{pmatrix}\int_a^b f_1(x)dx\\ \vdots\\ \int_a^b f_d(x)dx\end{pmatrix}$

证明：记 $\mathbb{R}^d$ 中的范数 $\|\cdot\|_\infty$，$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,\cdots,|x_d|\}$.

设 $c_1\cdot\|\cdot\|_\infty\le\|\cdot\|\le c_2\|\cdot\|_\infty$　（有限维空间，范数等价）（可相互控制）

"$\Rightarrow$" 若 $f\in R([a,b],V)$，记 $A=\int_a^b f(x)dx=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_d\end{pmatrix}$

$$|S(f_i,P,\xi)-A_i|\le\|S(f,P,\xi)-A\|_\infty\le\frac{1}{c_1}\|S(f,P,\xi)-A\|<\varepsilon.\quad □$$

Thm. 若 $f\in R([a,b],V)$，则 $\|f\|\in R([a,b],\mathbb{R})$，且 $\left\|\int_a^b f(x)\,dx\right\|\le\int_a^b\|f(x)\|\,dx$

Pf: $\|f(x)-f(y)\|\ge\big|\|f(x)\|-\|f(y)\|\big|$.

由振幅判据！可知，…… ✓

由可积性，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \forall P,\ \lambda(P)<\delta,\ \forall\xi$.

$\left\|\int_a^b f(x)dx-S(f,P,\xi)\right\|<\varepsilon$.

$\left|\int_a^b\|f(x)\|\,dx-S(\|f\|,P,\xi)\right|<\varepsilon$.

又 $\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|<\|S(f,P,\xi)\|+\varepsilon$,

$\le S(\|f\|,P,\xi)+\varepsilon$

$\le\int_a^b\|f(x)\|dx+2\varepsilon$

$\|S(f,P,\xi)\|=\left\|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right\|$.

$\le\sum_{i=1}^n\|f(\xi_i)\|(x_i-x_{i-1})$

$=S(\|f\|,P,\xi)$.

取 $\varepsilon\to0^+$. $\therefore\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|\le\int_a^b\|f(x)\|dx$.

Remark: Riemann积分可推广到更一般空间

e.g. $[a,b]\to V$ ← Fréchet 空间

据此：I. K. D. f. M. L. φ ← 任意一个解.

$\|y_n(x)-\varphi(x)\|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$. (可推唯一性)

Zig-Zag permutation

置换 $\sigma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，若每个 c_i 都不在 c_{i-1} 和 c_{i+1} 之间，称 σ 是一个交错的置换 (AP)

$Z_n=\#\{$交错置换$\}=?$

$n=1$, $\sigma_1=(1)$ $Z_1=1$; $n=2$, $\sigma_2=(1,2)$ 或 $(2,1)$ $Z_2=2$;

$n=3$, $\sigma_3=(1,3,2),(2,1,3),(3,1,2),(2,3,1)$ $Z_3=4$, $n=4$, $Z_4=10$; ……

若 $\sigma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是个AP，则 $\hat\sigma=(\hat c_1,\cdots\hat c_n)$ 也是个AP. $\hat c_i=n+1-i$

$A_n=Z_n/2$ $(n\ge2)$

$2A_{n+1}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}A_kA_{n-k}$ ($A_0=1$) 如果出现数不满足要求，取互补的即可，故使用 A_n 而非 Z_n

记 $A(t)=\sum_{n=0}\frac{A_n}{n!}t^n$ $\therefore 2A'(t)=1+A^2(t)$, $A(0)=1$. 可解 $A(t)=\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$

例: $(*)\begin{cases}y'=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$ $f(x,y)=x^2+y^2$

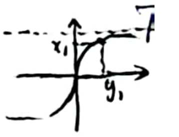
取 $a,b>0$, 由Picard定理知 $(*)$ 在 $[0,\alpha)$ 上有唯一解.

$y'=x^2+y^2\ge0$. ↑ $\exists x_1\in(0,\alpha)$, $y(x_1)>0$ 某点导函数非零相大于0

接下来考虑 $y(x)$ 在 (x_1,y_1) 附近的反函数 $x(y)$，满足 $x'(y)=\frac{1}{y'(x(y))}=\frac{1}{x(y)^2+y^2}$

$x(y_1)=x_1$.

$$x(y)=x_1+\int_{y_1}^{y}\frac{dz}{x(z)^2+z^2}\quad \because x'>0.\ \therefore x(z)>x(y_1)=x_1$$



$$\le x_1+\int_{y_1}^{y}\frac{dz}{x_1^2+z^2}\le x_1+\frac{1}{x_1}\int_{y_1/x_1}^{y/x_1}\frac{du}{1+u^2}\le x_1+\frac{1}{x_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=x_1+\frac{\pi}{x_1}$$

$z/x_1=u$

"进一步讨论" $y'=x^2+y^2$

令 $y=-\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ 代入得 $-\frac{\phi''\phi-\phi'^2}{\phi^2}=x^2+\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \Longleftrightarrow \phi''+x^2\phi=0.$ 好解(利用幂级数)

通解: $y(x)=\dfrac{x\left(c_1J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c_2J_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{c_1J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)+c_2J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ C是积分常数 J: Bessel 函数

定义: I.K.O.f 若存在 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

满足: ① $F(0)=0,\ F(r)>0\ (r>0)$

② 对 $x\in I$, $y_1,y_2\in K$, 有 $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le F(\|y_1-y_2\|)$.

③ $\forall\varepsilon>0.\ \int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$

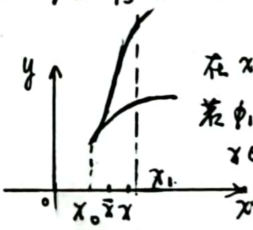
则称 f 满足 Osgood 条件。

定理 (Osgood)

若 f 满足 Osgood 条件, 则存在 $\delta>0$, 使得 (*) 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上存在唯一解.

y只有一个, 标量, 可比大小…

证明: (n=1). 存在性 (由 Peano) ✓ $\begin{cases}\phi'=f(x,\phi(x)).\\ \phi(x_0)=y_0\end{cases}$



在 x_1处有 $\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$

若 $\phi_1(x)<\phi_2(x)$

$x\in(\bar{x},x_1]$

则 $\exists x_0\in(x,x_1)$

s.t $\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$

矛盾.

假设 $\phi_1(x).\ \phi_2(x)$ 是两个解, 有 $x_1\ne x_0$.. $\phi_1(x_1)\ne\phi_2(x_1)$

不妨设 $x_1>x_0$. $\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$

考虑 $\{x\in[x_0,x_1]\mid\phi_1(x)=\phi_2(x)\}$, 它是非空, 闭集, 于是有最大元 $\bar{x}$. $(\phi_1(\bar{x})=\phi_2(\bar{x}))$

且 $\bar{x}<x_1$, 于是当 $x\in(\bar{x},x_1]$, 必有 $\phi_1(x)>\phi_2(x)$

记 $r(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$.

则 r 在 $(\bar{x},x_1]$上恒正. 且 $r'(x)=\phi_1'(x)-\phi_2'(x)=f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x))\le F(\phi_1(x)-\phi_2(x))=F(r(x))$

$\Downarrow$ $\frac{r'(x)}{F(r(x))}<1.$

于是 $\underset{+\infty=}{}\int_0^{r(x)}\frac{dr}{F(r)}\le\int_0^{r(x)}\frac{dr}{r'(x)}\underset{r(x)=z}{=}\int_{\bar{x}}^{x}dx=x-\bar{x}$ 矛盾!

正负性?

$\int_0^{r(x)}\frac{dr}{F(r)}<\int_{\bar{x}}^{x}dx$?

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|^{\alpha}$. 若 $\alpha>1$, 则 f 与 y 无关.

$$|f(y_1)-f(y_2)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(y_2+\frac{k}{n}(y_1-y_2)\right)-f\left(y_2+\frac{k-1}{n}(y_1-y_2)\right)\right]\right|\le L\left|\frac{y_1-y_2}{n}\right|^{\alpha}\cdot n=L|y_1-y_2|^{\alpha}n^{1-\alpha}$$

$\alpha>1.\quad 1-\alpha<0\quad |f(y_1)-f(y_2)|\to0.$ 与y无关.

若 $F(r)=L\cdot r^{\alpha}$ $\alpha<1$. 满足 Lipschitz条件 or不满足Osgood条件.

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{F(r)}=\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{L\cdot r^{\alpha}}=\frac{1}{L}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

"$F(r)=r\cdot|\log r|$" — 可用Osgood条件.

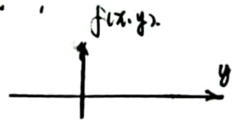
例: $\begin{cases} y'=\begin{cases}0 & y=0\\ y|\log y| & y\neq 0\end{cases} \\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 只有 $y_0=0$时"出问题". 用Osgood 可证.

解: $y(x)=e^{(\log y_0\cdot e^{x-x_0})}$ $(y_0>0)$. 或 $y\equiv 0$. $(y_0=0)$.

例 (Müller). Picard 序列不一定收敛, 但解唯一.

$x\in[0,1]$, $y\in\mathbb{R}$.

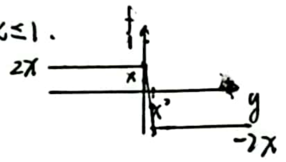
对于 $x=0$.



(些许模糊)

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x=0, \quad y\in\mathbb{R}\\ 2x & 0<x\le 1 \quad y<0\\ 2x-\frac{4y}{x} & 0<x\le 1 \quad 0\le y<x^2\\ -2x & 0<x\le 1 \quad x^2\le y\end{cases}$$

对于 $0<x\le 1$.



$y_0(x)=0$. $y_1(x)=\int_0^x f(t,0)\,dt=\int_0^x 2t\,dt=x^2$

$y_2(x)=\int_0^x f(t,t^2)\,dt=\int_0^x -2t=-x^2$. $y_3(x)=\int_0^x f(t,-t^2)\,dt=\int_0^x 2t=x^2$ …

$y_{2k}(x)=-x^2$. $y_{2k+1}(x)=x^2$. ∴不收敛! (不满足L条件).

另一方面, 该方程有唯一解.

引理: 在(*)中 (初值问题2) 若 f 关于 y 单调减, 则在 $x\geq x_0$ 上有唯一解.

Pf: 假设 ϕ_1, ϕ_2 是两个解, 且有 $x_1>x_0$ s.t. $\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$.

取 $\bar{x}=\max\{x\in[x_0,x_1]\mid \phi_1(x)=\phi_2(x)\}$

当 $x\in(\bar{x},x_1]$ 时 有 $\phi_1(x)>\phi_2(x)$. 对于 $r(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)$. 以及 区间 $[\bar{x},x_1]$ 应用 Lagrange中值定

$\exists\,\xi\in(\bar{x},x_1)$ 满足 $r'(\xi)=\frac{r(x_1)-r(\bar{x})}{x_1-\bar{x}}$ $(r(\xi)>0,\ \phi_1(\xi)>\phi_2(\xi))$ $f(x,y)$关于

∴ $\phi_1'(\xi)-\phi_2'(\xi)>0$, 即. $f(\xi,\phi_1(\xi))>f(\xi,\phi_2(\xi))$.. 与 y 减矛盾 ∴唯一解 □

§3.3 Peano定理

$I=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-x_0|\le a\}$, $K=\{y\in\mathbb{R}^n\mid \|y-y_0\|\le b\}$. $D=I\times K$. $f\in C(D,\mathbb{R}^n)$.

$M=\max\{\|f(x,y)\|\mid (x,y)\in D\}$. $\alpha=\min(a,\frac{b}{M})$. $J=\{x\in I\mid |x-x_0|\le\alpha\}$.

定理 (Peano)

(*) $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$ 在 J 上至少存在一个解.

证明：　　转化成积分方程.

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

考虑在 $[x_0,x_0+\alpha]$ 上的存在性. 对于 $n\in\mathbb{N}$，$x_i^{(n)}=x_0+i\cdot\frac{\alpha}{n}$　$i=0,1,2,\cdots,n$

对 $x\in[x_j,x_{j+1}]$，规定 $y_n^{(n)}(x)=\underbrace{y_0+\sum_{k=0}^{j-1} f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)}_{y_j}+f(x_j,y_j)(x-x_j)$.　欧拉折线

其中 $y_k=y_0+\sum_{\ell=0}^{k-1} f(x_\ell,y_\ell)(x_{\ell+1}-x_\ell)$

陈述事实：　$\le M\left(\sum_{k=0}^{j-1}|x_{k+1}-x_k|+|x-x_j|\right)\le b.$

① $\|y_n(x)-y_0\|\le\sum_{k=0}^{j-1}\|f(x_k,y_k)\|\,|x_{k+1}-x_k|+\|f(x_j,y_j)\|\cdot|x-x_j|$

分点不出 $D=I\times K$.　　$\min(a,\frac{b}{M})$.

$\|y_k^{(n)}(x)-y_0\|\le\sum_{\ell=0}^{k-1}\|f(x_\ell,y_\ell^{(n)})\|\,|x_{\ell+1}-x_\ell|\le M\sum_{\ell=0}^{k-1}|x_{\ell+1}-x_\ell|<M\cdot\alpha\le b$

② $\{y_n(x)\}$ 对于 $x\in[x_0,x_0+\alpha]$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 一致有界. $\|y_n(x)\|\le\|y_0\|+b$

③ (等度连续). 对 $x',x''\in[x_0,x_0+\alpha]$,

$\|y_n(x'')-y_n(x')\|\le M|x''-x'|$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$，$|x''-x'|<\delta$.

(已有 $y_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{j-1} f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_j,y_j)(x-x_j)$，$x\in[x_j,x_{j+1}]$).

Pf：设 $x'\in[x_{j_1},x_{j_1+1}]$，$x''\in[x_{j_2},x_{j_2+1}]$　不妨设 $j_1\le j_2$.

$$y_n(x')=y_0+\sum_{k=0}^{j_1-1} f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_{j_1},y_{j_1})(x'-x_{j_1})$$

$$y_n(x'')=y_0+\sum_{k=0}^{j_2-1} f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_{j_2},y_{j_2})(x''-x_{j_2})$$

$\sum_{k=0}^{j_2-1}-\sum_{k=0}^{j_1}$

$+f(x_{j_1},y_{j_1})(x_{j_1+1}-x_{j_1})$

$$\|y_n(x'')-y_n(x')\|=\Big\|\sum_{k=j_1+1}^{j_2-1} f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_{j_2},y_{j_2})(x''-x_{j_2})-\underbrace{f(x_{j_1},y_{j_1})(x'-x_{j_1})}\Big\|$$

$\to f(x_{j_1},y_{j_1})(x_{j_1+1}-x')$

$$\le M\cdot\Big(|x_{j_1+1}-x'|+\sum_{k=j_1+1}^{j_2-1}|x_{k+1}-x_k|+|x''-x_{j_2}|\Big)$$

$$=M|x''-x'|\quad\square$$

④ 定义 $\delta_n(x)=y_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))\,dt$，则 $\delta_n\rightrightarrows 0$ 在 $[x_0,x_0+\alpha]$.

$\|y_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))\,dt\|$　设 $x\in[x_j,x_{j+1}]$

$$=\Big\|\sum_{k=0}^{j-1}\underbrace{f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)}_{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k,y_k)\,dt}+\underbrace{f(x_j,y_j)(x-x_j)}_{\int_{x_j}^{x} f(x_j,y_j)\,dt}-\sum_{k=0}^{j-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t,y_k(t))\,dt-\int_{x_j}^{x} f(t,y_j(t))\,dt\Big\|$$

$$\le\sum_{k=0}^{j-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\|f(x_k,y_k)-f(s,y_n(s))\|\,ds+\int_{x_j}^{x}\|f(x_j,y_j)-f(s,y_j(s))\|\,ds\quad(*)$$

s 从 $[x_k,x_{k+1}]$ 取

∵ f 一致连续　∴ 对 $\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$. s.t 当 $\|(x',y')-(x'',y'')\|<\delta$ ⇒ $\|f(x',y')-f(x'',y'')\|<\frac{\varepsilon}{2\alpha}$.

$|x_k-s|<\frac{\alpha}{n}$，$|x_j-s|<\frac{\alpha}{n}$　$\|y_k-y_n(s)\|=\|y_n(x_k)-y_n(s)\|\le M\cdot\frac{\alpha}{n}$，$\|y_j-y_n(s)\|\le M\frac{\alpha}{n}$

⇒ 存在 N. 使得 $n>N$ 时. $\|(x_k,y_k)-(s,y_n(s))\|<\delta$.　$s\in[x_k,x_{k+1}]$.

$\|(x_j,y_j)-(s,y_j(s))\|<\delta$.　$s\in[x_j,x_{j+1}]$

$$(*)\le\frac{\varepsilon}{\alpha}\Big(\sum_{k=0}^{j-1}(x_{k+1}-x_k)+(x-x_j)\Big)=\frac{\varepsilon}{2\alpha}\underbrace{(x-x_0)}_{\le\alpha}<\varepsilon\qquad\square$$

由②③及AA定理可知 $\{y_n(x)\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_j}(x)\}$. 记 $\phi(x)=\lim\limits_{j\to\infty} y_{n_j}(x)$

由 $\lim\limits_{j\to\infty}\delta_{n_j}(x)=0$ 可知 $\phi(x)=y_0+\lim\limits_{j\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n_j}(t))\,dt$.   (a)

记 $z_j(t)=f(t,y_{n_j}(t))$ 由f的一致连续性可知 $z_j(t)\rightrightarrows f(t,\phi(t))$

(a) $\Longleftrightarrow$ $\phi(x)=y_0+\lim\limits_{j\to\infty}\int_{x_0}^{x} z_j(t)\,dt = y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt$ ∴ $\phi(x)$ 为 Cauchy 问题解. □

欧拉折线

缺点 ①误差大  多分点、二次曲线逼近

②误差不均 "隐式欧拉法"

3.4 解的延伸 (*) $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ $\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt$.

(整体存在性问题)

I是R中开区间, Ω是R^n中区域, $D=I\times\Omega$, $f\in C(D,R^n)$ $\overline{B}(x_0,r)=\{x\in R \mid \|x-x_0\|\le r\}$

对于 $(x_0,y_0)\in D$, 可取 $\underbrace{a_0,b_0}_{>0}$ 使得 $\overline{B}(x_0,a)\times\overline{B}(y_0,b)\subseteq D$

由Peano定理 $\exists\alpha_0>0$,

s.t (*) 在 $\overline{B}(x_0,\alpha_0)$ 上有解 $y(x)$.

取 $x_1=x_0+\alpha$, $y_1=y(x_1)$; 再取 $a_1, b_1, \exists\alpha_1, y$, $x_2=x_1+\alpha_1$, $y_2=y(x_2)$; ...

$x_k=x_0+\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=$?

任意解曲线均可延伸至边界

Case I. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_+$ (x定义域边界)

Case II: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k < x_+$?

引理: 设 $J\subseteq I$ 子区间, $\phi: J\to\Omega$ 是(*)的一个解. 并且J是ϕ的最大存在区间 (J=I 不考虑了!)

若 $J\neq I$, 则对于Ω的任一紧子集K, 存在 $x\in J$ s.t. $(x,\phi(x))\notin K$

Pf: 假设有一个紧子集 $K\subseteq\Omega$, s.t. 对 $\forall x\in J$, $(x,\phi(x))\in K$,

只看 $x\ge x_0$ 的部分.   设 $M=\max\limits_{(x,y)\in D}\|f(x,y)\|$

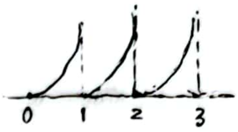
$J=(\omega_-,\omega_+)$, $\omega_+\in I$, 则对 $x,y\in J$ $\|\phi(x)-\phi(y)\|=\left\|\int_x^y f(t,\phi(t))\,dt\right\|\le M|x-y|$

由Peano定理可知, J一定是开的 (若 $J=(\omega_-,\omega_+]$, 总能再走一小步")

于是 ϕ 在J上一致连续

∴ $\lim\limits_{x\to\omega_-^+}\phi(x)$, $\lim\limits_{x\to\omega_+^-}\phi(x)$ 都存在   这说明J不是最大的 □

事实：解的最大延伸区间是依赖于具体的解的选取的.　Ex. $y'=y^{\frac{1}{3}}$



$y(x)=\frac{(x-c)^2}{x-c-1}$.

$\Rightarrow c=g(x,y)$

$0=g'=g_x+g_y\cdot y'$

$\Rightarrow y'=-\frac{g_x}{g_y}$

推论

若 f 满足一定的唯一性条件，则过 D 中每一点都存在一条积分曲线，且其端点在 ∂D 上.

特别地，若 $f\in C^1(D,\mathbb{R}^n)$，

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le \overbrace{\max_{\xi\in D}\|f'_y(\xi)\|}^{M}\,\|y_1-y_2\|$$

推论：若 $f(x,y)$ 满足 $\|f(x,y)\|\le A(x)\|y\|+b(x)$，其中 $A,b\in C(I,\mathbb{R}_{\geq 0})$

则 Cauchy 问题(*)在 I 上存在一个解（全局）不一定唯一.

Pf：假设 ϕ 是(*)一个解，存在区间 $J=(\omega_-,\omega_+)$，且 $J\neq I$．只考虑右半面.

则对 $x\in J$，$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt$．$(x\geq x_0)$

$$\|\phi(x)\|\le\|y_0\|+\int_{x_0}^{x}\|f(t,\phi(t))\|dt\le\|y_0\|+\int_{x_0}^{x}\big(A(t)\|\phi(t)\|+b(t)\big)\,dt. \quad (a)$$

设 $M_A=\max\{|A(x)|\mid x\in[x_0,\omega_+)\}$　$M_b=\max\{b(x)\mid x\in[x_0,\omega_+)\}$

$$(a)\le\underbrace{\|y_0\|+M_b\cdot(\omega_+-x_0)}_{C_1}+\underbrace{M_A}_{C_2}\cdot\int_{x_0}^{x}\|\phi(t)\|\,dt$$

设 $u(x)=\|\phi(x)\|$．由 Grownwall 不等式　$u(x)\le C_1+C_2\int_{x_0}^{x}u(x)\,dx$

$\Rightarrow u(x)\le C_1e^{C_2(x-x_0)}\le C_1e^{C_2(\omega_+-x_0)}$ 即有上界 R

$\therefore \phi$ 图像的右边完全落入 $[x_0,\omega_+]\times\overline{B}(0,R)\longrightarrow$ 紧集．故矛盾． □

Ex $y'=A(x)y+b(x)$．$A\in C(I,\mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$．$b\in C(I,\mathbb{R}^n)$　（第5章）

$n\times n$ 阶矩阵.　$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 线性变换.

§3.5 比较定理

I 是 $\mathbb{R}$ 的开区间，Ω_f 是 $\mathbb{R}^n$ 的区域，$D_f=I\times\Omega_f$，$f\in C(D_f,\mathbb{R}^n)$．$(x_0,y_0)\in D_f$.

Ω_u 是 $\mathbb{R}$ 的开区间，对于 $y\in\Omega_f$，$\|y\|\in\Omega_u$．$D_u=I\times\Omega_u$．$u\in C(D_u,\mathbb{R})$.

满足 对于 $(x,y)\in D_f$．$\|f(x,y)\|\le u(x,\|y\|)$ 或 $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le u(x,\|y_1-y_2\|)$.

Ω_u 需扩大，即 $\forall y_1,y_2\in\Omega_f$，$\|y_1-y_2\|\in\Omega_u$.

定理（第一比较定理） 局部　　标量版 $\begin{cases} z' = u(x,z) \\ z(x_0)=z_0 \end{cases}$

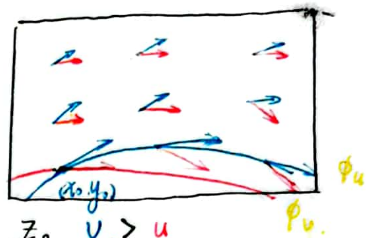
设 I、Ω 是区间，$u, v \in C(D, \mathbb{R})$，若 $u(x,z) < v(x,z)$，$\forall (x,z) \in D$.
$D = I \times \Omega$

设 $\phi_u : J \to \mathbb{R}$ 是 $\begin{cases} z' = u(x,z) \\ z(x_0)=z_0 \end{cases}$ 的一个解，$\phi_v : J \to \mathbb{R}$ 是 $\begin{cases} z' = v(x,z) \\ z(x_0)=z_0 \end{cases}$ 的一个解.
(w_-, w_+)

其中 J 是 I 的子区间，且 $x_0 \in J$，$z_0 \in \Omega$

则对 $x \in J$，若 $x > x_0$，则 $\phi_u(x) < \phi_v(x)$；
若 $x < x_0$，则 $\phi_u(x) > \phi_v(x)$；

几何理解



Proof：设 $\psi(x) = \phi_v(x) - \phi_u(x)$.

则 $\psi \in C'(I, \Omega)$，$\psi(x_0) = 0$，$\psi'(x_0) = v(x_0, \phi_v(x_0)) - u(x_0, \phi_u(x_0)) > 0$

$\therefore \exists \delta > 0$. s.t 当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时 $\psi(x) > 0$，（以下只证 $x > x_0$ 情况）

假设存在 $x_1 \in [x_0, w_+)$，s.t $\psi(x_1) \le 0$　　$\begin{cases} \text{非空}.\ \because \text{介值定理}.\ (x_0, x_1+\delta) \text{正}，[x_0, w_+) \text{负}. \therefore \text{中间有零点}. \\ \text{又闭集.故一定能找min.即}\alpha\text{存在}. \end{cases}$（但不变

设 $\alpha = \min\{x \in [x_0+\delta, x_1] \mid \psi(x) = 0\}$

则 $\psi(\alpha) = 0$

且对于 $x \in (x_0, \alpha)$，有 $\psi(x) > 0$，

即 $\psi'(\alpha) \le 0$.

另一方面 $\psi'(\alpha) = v(\alpha, \phi_v(\alpha)) - u(\alpha, \phi_u(\alpha)) > 0$　矛盾！ □

同一个点（$\because \psi(\alpha) = 0$）

定理一定义..

$u \in C(D, \mathbb{R})$，$(x_0, z_0) \in D$，$\exists J \subseteq I$，$x_0 \in J$；$(*)\begin{cases} z' = u(x,z) \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$ 的两个解 $\phi_{min}, \phi_{max} : J \to \Omega$.

满足对 J 上任一解 $\phi(x)$（J 可适当缩小）.

有 $\phi_{min}(x) \le \phi(x) \le \phi_{max}(x)$　$\forall x \in J$. 且 $\phi_{min}(x)$ 最小解. $\phi_{max}(x)$ 最大解是唯一.

证明. 对 $n \in \mathbb{N}$，考虑.

$$(*)_n : \begin{cases} z' = u_n(x,z) = u(x,z) + \frac{1}{n} \\ z(x_0) = z_0. \end{cases}$$

取 $a, b > 0$. 使 $\underbrace{\overline{B}(x_0, a) \times \overline{B}(z_0, b)}_{=: D'} \subset D$，在 D' 上应用 Peano 存在定理

于是 $(*)_n$ 在 $\overline{B}(x_0, \alpha_n)$ 上有解，$\alpha_n = \min(a, \frac{b}{M_n})$. $M_n = \max\limits_{(x,z)\in D'} \{u_n(x,z)\}$.

取 $M = \max\limits_{(x,z)\in D} |u(x,z)|$. $M_n \le M + \frac{1}{n}$；$\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

取一个 $\alpha' \in (0, \alpha)$. 则对于充分大的 n，$\alpha_n \ge \alpha'$

于是 $\phi_n : \overline{B}(x, \alpha') \to \Omega$，下面考虑 $\{\phi_n(x)\}$ 的性质

① $|\phi_n(x) - z_0| \le b$　$\Rightarrow \{\phi_n(x)\}$ 一致有界

② $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \le (M+1)|x-y|$ $\Rightarrow \{\phi_n(x)\}$ 等度连续

由 AA 定理 $\exists \{\phi_{n_j}(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 一致收敛. 设 $\hat{\phi}(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \phi_{n_j}(x)$

则 $\hat{\varphi}$ 是原问题的解

下证 $\hat{\varphi}$ 在 $[x_0, x_0+\alpha']$ 上是 φ_{max}. 在 $[x_0-\alpha', x_0]$ 上是 φ_{min}

$\because u_n(x,y) > u(x,y)$. $\therefore$ 由第1比较定理.

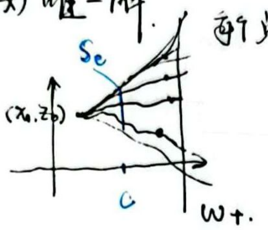
在 $[x_0, x_0+\alpha']$ 上 $\varphi_{n_j}(x) > \varphi(x)$; $\hat{\varphi}(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}(x) > \varphi(x)$; 另一侧类似.

最后要得到左边的 φ_{max} 和右边的 φ_{min} 以考虑 $(*)_n$: $\begin{cases} z' = u(x,z) - \frac{1}{n} \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$ □

Remark: ① φ_{max}. φ_{min} 的 J 是最小的. 即任何其它的解的存在区间比 J 大.

② $\varphi_{max} = \varphi_{min}$ $(*)$ 唯一解. 每个点都有一个解扫过.

③ Peano 扫帚



定理 (Kneser) S_c 连通紧集

其中 $S_c = \{y \in \Omega \mid$ 存在一个 $(*)$ 的解 φ. s.t $\varphi(c) = y\}$

$R = \{(x,y) \in D \mid \exists \varphi, s.t\ \varphi(x) = y\}$.

第二比较 (向量版)

定理, I: R 中开区间

Ω_f: R^n 中的区域. $D_f = I \times \Omega_f$. $F \in C(D_f, R^n)$.

Ω_u: R 中开区间 $D_u = I \times \Omega_u$ $u \in C(D_u, R)$. u关于y单调增 (可以不加). 但需要更精细!

条件: ① $\|y\| \in \Omega_u$. $\forall y \in \Omega_f$ ② $\|f(x,y)\| \le u(x, \|y\|)$ $\forall x, y \in D_f$

对于 $(x_0, y_0) \in \Omega_f$, 以及 $z_0 \in \Omega_u$. $\|y_0\| \le z_0$

设 Φ: $J \to \Omega_u$. 是 $(*)_u$ 的最大解, 则对 $(*)_f$ $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = z_0 \end{cases}$ 存在 J上的解 φ. 且有 $\|\varphi(x)\| \le \Phi(x)$ $\forall x \in J$

(标量版)

$w(x,y) \le f(x,y) \le U(x,y)$.

$\Phi_{w\,min}$, $\Phi_{U\,max}$: $J \to R$. 则在 J 上存在 $(*)_f$ 的解 φ. 且 $\Phi_{w\,min}(x) \le \varphi(x) \le \Phi_{U\,max}(x)$

证明: 由Peano定理. 设 $(*)_u$ 和 $(*)_f$ 在 $J_\alpha = [x_0, x_0+\alpha)$ 上存在 Φ, φ.

由 Φ 的构造方法. 存在一列单调递减趋于0的 ε_n 以及 $(*)_{u,n}$ $\begin{cases} z' = u(x,z) + \varepsilon_n \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$ 的一个解

Φ_n 使得在 J_α 上有 $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$

下证: 对于 $x \in (x_0, x_0+\alpha)$ 有 $\|\varphi(x)\| \le \Phi_n(x)$

定义辅助函数 $\psi_n(x) = \Phi_n(x) - \|\varphi(x)\|$. $\psi_n(x_0) = z_0 - \|y_0\| \ge 0$

若 $\psi_n(x) > 0$. √.

若 $\psi_n(x) = 0$. 则当 $x > x_0$ 且 $x - x_0$ 充分小时. 有 $\psi_n(x) > 0$

取一个充分小的 $h>0$. 实质：持

$$\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)$$
$$=\Phi_n(x_0+h)-\|\phi(x_0+h)\|-\Phi_n(x_0)+\|\phi(x_0)\|$$
$$=\Big(\Phi_n(x_0+h)-\underbrace{\Phi_n(x_0)}_{z_0}\Big)-\Big(\|\phi(x_0+h)\|-\|\phi(x_0)\|\Big).$$
$$\geqslant u_n(x_0,z_0)h+o(h)-u(x_0,\underbrace{\|y_0\|}_{=z_0})h+o(h) \quad (\because 单调性).$$
$$\geqslant \varepsilon_n h+o(h).$$

$$\Big|\|\phi(x_0+h)\|-\|\phi(x_0)\|\Big|$$
$$\leq \|\phi(x_0+h)-\phi(x_0)\| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t,\phi(t))dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} u(t,\|\phi(t)\|)dt$$
$$\leq \|f(x_0,y_0)h+o(h)\|$$
$$\leq u(x_0,\|y_0\|)\cdot h+o(h)$$

$$\geqslant \int_{x_0}^{x_0+h}\left[u(t,\Phi_n(t))+\varepsilon_n\right]dt-\int_{x_0}^{x_0+h}u(t,\|\phi(t)\|)dt \geqslant h\varepsilon_n-\int_{x_0}^{x_0+h}\cdots$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_n h>0$$

h 充分小. $t\to x_0$.

$\because \lim\limits_{t\to x_0^+}\left[u(t,\Phi_n(t))-u(t,\|\phi(t)\|)\right]=0.$

$\therefore \exists\,\delta>0$, s.t $0<h<\delta$ 时. $\forall\, t\in[x_0,x_0+h]$, 有

$$\left|u(t,\Phi_n(t))-u(t,\|\phi(t)\|)\right|<\frac{\varepsilon_n}{2}$$

当 $h\to 0$. $|o(h)|<\varepsilon_n h$.

$\therefore$ LHS >0. $\Rightarrow$ 有 $\psi_n(x)>0$.

若 $\exists\, x_1\in(x_0,x_0+\alpha)$ s.t $\psi_n(x_1)\leq 0$, 介值定理、至少一个零点, 在 $(x_0,x_0+\alpha)$ 上.

设 $\alpha_0>\min\{x\in(x_0,x_0+\alpha]\mid \psi_n(x)=0\}$. 则 $\psi_n(\alpha_0)=0$

再取充分小的 $h>0$.

$$\underbrace{\psi_n(\alpha_0-h)}_{>0}-\underbrace{\psi_n(\alpha_0)}_{=0}\ \underline{\underline{>0}}.$$

$$=\Phi_n(\alpha_0-h)-\Phi_n(\alpha_0)+\Big(\|\phi(\alpha_0)\|-\|\phi(\alpha_0-h)\|\Big)\leqslant u_n(\alpha_0,\psi_n(\alpha_0))(-h)+u(\alpha_0,\|\phi_n(\alpha_0)\|)h+o(h)=-\varepsilon_n h+o(h)\ \underline{\underline{\leq 0}}.$$

矛盾!

$\Rightarrow \forall\, x\in(x_0,x_0+\alpha)$. $\psi_n(x)>0$. 再取 $n\to\infty$. 得 $\|\phi(x)\|\leqslant\Phi(x)$

再进行延拓, 局部 $\to$ 全局 $\quad\square$

Ex 的 $\begin{cases} y'=x^2+(1+y)^2 \\ y(0)=0\end{cases}$ 考虑它在 $|x|\leq 1$ 上的解的存在性.

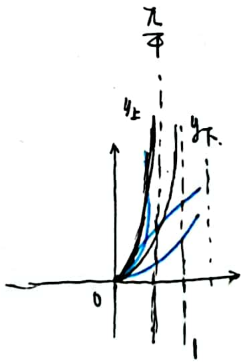
Solution: $\underbrace{(1+y)^2}_{u}\leq x^2+(1+y)^2\leq \underbrace{1+(1+y)^2}_{v}$.

$(*)_u$: $\begin{cases} y'=(1+y)^2 \\ y(0)=0.\end{cases}$ $\qquad$ $(*)_v$: $\begin{cases} y'=1+(1+y)^2 \\ y(0)=0\end{cases}$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$-\dfrac{1}{1+y}=x-1 \qquad\qquad y_上=\tan(x+\frac{\pi}{4})-1$

即 $y_下=\dfrac{1}{1-x}-1.$



若 $(*)$ 的存在区间是 $[0,\beta)$.

则 $\beta\geqslant\frac{\pi}{4}$ (若 $\beta<\frac{\pi}{4}$, 紧的出不去).

同理 $\beta\leq 1$.

$\Rightarrow \beta\in(\frac{\pi}{4},1)$. 端点单独考虑!

定理 (唯一性). Ω_u: $\mathbb{R}$ 中区间. $\forall\, y_1,y_2\in\Omega_f \quad \|y_1-y_2\|\in\Omega_u$

$D_u=I\times\Omega_u \quad u\in C(D_u,\mathbb{R}).$ $\qquad \forall\, x\in I$, $\forall\, y_1,y_2\in\Omega_f$. $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\leq u(x,\|y_1-y_2\|)$

$D_f=I\times\underbrace{\Omega_f}_{\mathbb{R}^n 区域} \quad f\in C(D_f,\mathbb{R}^n).$

若 $(*)_u$ 只有零解. 则 $(*)_f$ $\underbrace{至多有一个解}_{在 x_0 附近}$.

证明. 假设 $\phi(x)$ 是 $(*)_f$ 在 x_0 附近的一个解

设 $y=\phi+\hat{y}$ 或 $\hat{y}=y-\phi$. 则 $\hat{y}'=y'-\phi'=f(x,y)-f(x,\phi(x))$

$$=f(x,\hat{y}+\phi)-f(x,\phi(x))=\hat{f}(x,\hat{y})$$

$\hat{y}(x_0)=y(x_0)-\phi(x_0)=0$

$(*)_{\hat{f}}\begin{cases}\hat{y}'=\hat{f}(x,\hat{y})\\ \hat{y}(x_0)=0.\end{cases}$ 其中 $\hat{f}$ 满足 $\|\hat{f}(x,\hat{y})\|\le u(x,\|\hat{y}\|)$

由第二比较定理 $(*)_{\hat{f}}$ 在 J 上有解 ← {零解存在区间} ∩ {$(*)_f$ 解存在区间}

且 $\|\hat{\phi}(x)\|\le\Phi(x)$

Φ 是 $(*)_u$ 的最大解

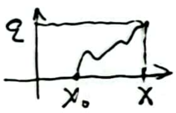
由已知条件 $\Phi(x)\equiv0$. $\Rightarrow\|\hat{\phi}(x)\|=0\Rightarrow\hat{\phi}(x)=0=\hat{y}=y-\phi$. □

推论: ① $u(x,r)=L\cdot r$

② $u(x,r)=F(r)$. $\int_0^{\varepsilon}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$. $\forall\varepsilon>0$,

Ex $(*)_u\begin{cases}z'=u(x,z)=F(z)\\ z(x_0)=0\end{cases}$ 只有零解. $\omega=\frac{dz}{F(z)}=dx$

假设 $\exists x$. s.t $\overset{\varepsilon}{\overset{\parallel}{F(x)}}>0$



$\Rightarrow\underbrace{\int_0^{\varepsilon}\frac{dz}{F(z)}}_{+\infty}=\int_{x_0}^{x}dx=x-x_0\ (\ne+\infty)$. 矛盾 ∴不存在 x s.t $F(x)>0$.

(Osgood 向量版本唯一性!)

Remark: 亦可 $u(x,r)=p(x)q(r)$. $z'(x)=p(x)\cdot q(z)$

$$\underbrace{\int\frac{dz}{q(z)}}_{+\infty}=\underbrace{\int p(x)dx}_{<+\infty}$$

§3.6 奇解和包络 (foliation 叶层结构) !

§4 解对初值和参数的依赖

§4.1 连续性

$(*)\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$, ① 若 (x_0,y_0) 在某个区域内变动时. $(*)$ 都有唯一解 $y=\phi(x;\underbrace{x_0,y_0}_{\text{体现对初值的依赖}})$、问 ϕ 关于 x_0,y_0 是否连续?

② $(*)'\begin{cases}y'=f(x,y,\lambda)\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}$ 若 λ 在某区域变动, $(*)'$ 都有唯一解 $y=\phi(x;\lambda)$ 问 ϕ 关于 λ 是否连续?

定理：I：$\mathbb{R}$中开区间　　$\mathcal{U}$是D的一个有界子区域

Ω_y：$\mathbb{R}^n$中区域　　J是I的一个有界子区间

Ω_λ：$\mathbb{R}^m$中区域　　设对于所有$x_0 \in J$且$(x_0, y_0, \lambda_0) \in \mathcal{U}$

$D = I \times \Omega_y \times \Omega_\lambda$

$f \in C(D, \mathbb{R}^n)$　　$(*) \begin{cases} y' = f(x, y, \lambda_0) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在J上有唯一解 $\phi(x; x_0, y_0, \lambda_0)$

则 $\phi \in C(J \times \mathcal{U}, \Omega_y)$.（即解为连续函数）

Pf：不妨设 $x_0 = 0$ 且 f 不依赖于 λ.

即考虑如下问题

$(*) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = z \end{cases}$ 的唯一解 $\phi(x, z)$ 在 $J \times \mathcal{U}$ 上的连续性

假设 $\phi(x, z)$ 在 $(x_0, z_0) \in J \times \mathcal{U}$ 处不连续，即 $\exists \varepsilon_0 > 0$，s.t $\forall \delta > 0$，$\exists (x_\delta, y_\delta) \in J \times \mathcal{U}$.

满足 $\|(x_\delta, z_\delta) - (x_0, z_0)\| < \delta$，且 $\|\phi(x_{\delta_j}, z_\delta) - \phi(x_{\delta_j}, z_0)\| \geq \varepsilon_0$

取一串 δ_n 单调递减趋于 0，（比如 $\delta_n = \frac{1}{n}$）

记相应的 $(x_{\delta_n}, z_{\delta_n})$ 为 (x_n, z_n)

$\because \|(x_n, z_n) - (x_0, z_0)\| < \delta_n \to 0$　$\therefore x_n \to x_0$，$z_n \to z_0$

考虑定义在J上的函数列 $\{\phi(x_j, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$，则它满足

① $\phi(x; z_n) = z_n + \int_0^x f(x, \phi(x; z_n))\,dx$

② $\|\phi(x; z_n)\| \leq \|z_n\| + \|\int_0^x f(x, \phi(x; z_n))\,dx\|$　　$x \in J$，$\phi \in \mathcal{U}$，$J \times \mathcal{U}$是D的有界区域

$\leq R_u + M_f \cdot |J|$　一致有界

③ $\|\phi(x_1, z_n) - \phi(x_2, z_n)\| \leq M_f |x_1 - x_2| \Rightarrow$ 等度连续

本题J为开，但 actually，J为有限开时，可延拓至其闭包，故AA thm仍成立！

要求"闭"　由AA定理 $\{\phi(x_j, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个一致收敛的子列　$(= \phi(x, z_0))$

不妨设 $\{\phi(x_j, z_n)\}$ 已经是一致收敛的，对①式两边取极限，记 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x_j, z_n) = \psi(x)$

则 $\psi(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\,dx$，这说明 $\psi(x)$ 是 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = z_0 \end{cases}$ 的解.

又该方程有唯一解 $\phi(x; z_0)$，于是 $\psi(x) = \phi(x, z_0)$

对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ s.t $\forall n > N$，$x \in J$ 有 $\|\phi(x, z_n) - \phi(x; z_0)\| < \varepsilon$

特别地，取 $x = x_n$，则 $\|\phi(x_n; z_n) - \phi(x_n; z_0)\| < \varepsilon$.

$\because \phi(x, z_0)$ 关于x是连续的，而 $x_n \to x_0$，于是 $\exists N' \in \mathbb{N}$，s.t $n > N'$ 时，$\|\phi(x_n; z_0) - \phi(x_0, z_0)\| < \varepsilon$

则当 $n > \max\{N, N'\}$ 时 $\underbrace{\|\phi(x_n, z_n) - \phi(x_0, z_0)\|}_{\varepsilon_0 \leq} \leq \|\phi(x_n, z_n) - \phi(x_n, z_0)\| + \|\phi(x_n, z_0) - \phi(x_0, z_0)\| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2}$

$< \varepsilon_0$

矛盾！ □

§5.2 光滑性（or 可微性）

(*) $\begin{cases} y'=f(x,y,\lambda_0) & 光只要求 \frac{\partial f}{\partial y} 和 \frac{\partial f}{\partial \lambda} 存在且连续 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

若 $\frac{\partial f}{\partial y}\in C(D,R^n)$，局部 Lipschitz 条件，对 $(x_0,y_0)\in I\times\Omega_y$，找 $a,b>0$，s.t. $\overline{B}(x_0,a)\times\overline{B}(y_0,b)\subseteq\Omega_y$ "凸"

由有限增量定理 $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le\max\limits_{\substack{x\in I\\ \xi\in[y_1,y_2]}}\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\|\,\|y_1-y_2\|$

由 Picard 定理，有唯一解。

定理：$f\in C(D,R^n)$，$\frac{\partial f}{\partial y_i},\frac{\partial f}{\partial\lambda_k}\in C(D,R^n)$，$i=1,2,\dots,n$，$k=1,2,\dots,m$，$(x,y,\lambda)\longmapsto f(x,y,\lambda)$。

$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)$，$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

假设 U 是 D 的子区域，J 是 I 的子区间，且对于 $(x_0,y_0,\lambda_0)\in U$，(*) 在 J 上有唯一解 $\phi(x;x_0,y_0,\lambda_0)$

则 $\phi\in C^1(J\times U,\Omega_y)$

注：J 可以随 (x_0,y_0,λ_0) 变化，$J=(\omega_-,\omega_+)$。

证明：不妨考虑以下约化的问题。

(*)' $\begin{cases} y'=f(x,y,\lambda) \\ y(0)=0 \end{cases}$ （平移原方程） 或 (*)'' $\begin{cases} y'=f(x,y,\lambda) \\ y(0)=z \end{cases}$

将它的解记为 $\phi(x;\lambda)$，要证 $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\in C(J\times U,\Omega_y)$

$\phi(x;\lambda)=\int_0^x f(t,\underbrace{\phi(t;\lambda)}_{y},\lambda)\,dt$

若 $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}$ 存在，则 $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda_k}(x,\lambda)=\int_0^x\Big(\sum\frac{\partial f}{\partial y_i}\underbrace{\frac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_k}}_{\text{Jacobi}}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_k}\Big)dt$

$\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\lambda)\neq$ ~~$\int_0^x\frac{\partial f}{\partial y}(x,\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(x,\lambda)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x$~~

$=\int_0^x\Big[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,\phi(t,\lambda),\lambda)}_{J:\text{矩阵}}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t,\lambda)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial\lambda}(t,\phi(t,\lambda),\lambda)}_{K:\text{向量}}\Big]dt$，记 $\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}=\psi$。

即有 $\begin{cases}\psi'=J\psi+K\\ \psi(0)=0\end{cases}$ $(*)_\psi$，解记为 $\psi(x;\lambda)$，$\psi\in C(J\times U,\Omega_y)$。

下证，$\psi=\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}$，即 $\phi(x;\lambda_*)-\phi(x;\lambda_0)-\psi(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)=o(\|\lambda-\lambda_0\|)$

引理（Hadamard）法国人（H不发音）

Ω_x：R^p 中区域，Ω_y：R^q 中凸区域，$f\in C(\Omega_x\times\Omega_y,R)$

$\frac{\partial f}{\partial y}\in C(\Omega_x\times\Omega_y,R)$，则对于 $y_0\in\Omega_y$，存在 $g_k\in C(\Omega_x\times\Omega_y,R)$ $k=1,2,\cdots,q$

满足 $\forall x\in\Omega_x$，$y\in\Omega_y$，$f(x,y)=f(x,y_0)+\sum\limits_{k=1}^{q}g_k(x,y)(y-y_0)_k$，且 $g_k(x,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y_0)$

证明：记 $h(t)=f(x,(1-t)y_0+ty)$ $t\in[0,1]$ $h(0)=f(x,y_0)$ $h(1)=f(x,y)$

y_0 y $(1-t)y_0+ty$

$$h'(t)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,(1-t)y_0+ty)(y-y_0)$$

$$h(1)-h(0)=\int_0^1 h'(t)\,dt. \quad f(x,y)-f(x,y_0)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y}(x,(1-t)y_0+ty)(y-y_0)\,dt$$

记 $g_k(x,y)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,(1-t)y_0+ty)\,dt \longrightarrow =\sum_{k=1}^{2}g_k(x,y)(y-y_0)$ □

$$g_k(x,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y_0)$$

$$\phi(x;\lambda)-\phi(x;\lambda_0)-\psi(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)$$

$$=\int_0^x\left[f(t,\phi(t,\lambda),\lambda)-f(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)+\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)\right)(\lambda-\lambda_0)\right]dt \quad ☆$$

引理应用到 $f(t,y,\lambda)$ 上，记 $f(t,\phi(t,\lambda),\lambda)-f(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)=A(t,\lambda)(\phi(t,\lambda)-\phi(t,\lambda_0))+B(t,\lambda)(\lambda-\lambda_0)$

有 $A(t,\lambda_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)$ $B(t,\lambda_0)=\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t,\phi(t,\lambda_0),\lambda_0)$.

$$☆=\int_0^x A(t,\lambda)(\phi(t,\lambda)-\phi(t,\lambda_0))+B(t,\lambda)(\lambda-\lambda_0)-[A(t,\lambda_0)\psi(t,\lambda_0)+B(t,\lambda_0)](\lambda-\lambda_0)\,dt.$$

$$=\int_0^x A(t,\lambda)[\phi(t,\lambda)-\phi(t,\lambda_0)-\psi(t,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)]+[A(t,\lambda)-A(t,\lambda_0)]\psi(t,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)+(B(t,\lambda)-B(t,\lambda_0))(\lambda-\lambda_0)\,dt.$$

给定 $\varepsilon>0$

不妨设 $x\in[0,h]$，$\lambda\in\bar{B}(\lambda_0,\delta)$，$\delta$ 充分小，使得 $\|\psi(A(t,\lambda)-A(t,\lambda_0))+B(t,\lambda)-B(t,\lambda_0)\|<\varepsilon$

记 $\Delta(x)=\|\phi(x,\lambda)-\phi(x,\lambda_0)-\psi(x,\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)\|$.

$$\le\int_0^x\underbrace{\|A(t,\lambda)\|}_{\text{Max }A}\Delta(t)\,dt+\underbrace{\varepsilon\|\lambda-\lambda_0\|\cdot h}_{\text{与}x\text{无关常数}}$$

由 Gronwall 不等式 $\Delta(x)\le\varepsilon\|\lambda-\lambda_0\|\cdot h\,e^{MAh} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta(x)}{\|\lambda-\lambda_0\|}$ 不一定存在，改为 $\limsup\limits_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta(x)}{\|\lambda-\lambda_0\|}\le\varepsilon h e^{MAh}$

$\because\varepsilon$ 任意性，$\therefore\limsup\limits_{\lambda\to\lambda_0}\cdots=0$ 即 $\Delta(x)=o\|\lambda-\lambda_0\|$. □

趣题：$y''+3yy'+y+y^3=0$.

设 $y=\frac{\phi'}{\phi}$ $\phi'''+\phi'=0\Rightarrow\phi=C_0+C_1\sin x+C_2\cos x$

$$\therefore y=\frac{C_1\cos x-C_2\sin x}{C_0+C_1\sin x+C_2\cos x}\quad (C_0,C_1,C_2)\ne(0,0,0)$$

解构成二维射影空间！

$$\begin{cases}yy''=y^2+y'^2\\ y(0)=1\\ y'(0)=1\end{cases}$$

$(\log y)''=(\ln y)''=\left(\frac{y'}{y}\right)'=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}$

$\therefore$ 本题 $(\ln y)''=1$. $y=e^{\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2}$

若带系数

$$(y^\alpha)''=(\alpha y^{\alpha-1}\cdot y')'=\alpha(y^{\alpha-1}y''+(\alpha-1)y^{\alpha-2}(y')^2)$$

$$=\alpha y^\alpha\left(\frac{y''y+(\alpha-1)(y')^2}{y^2}\right)$$

Painlevé II.

女 6 T (第2个

$y''=f(x,y,y')$

$$\begin{cases} y''=2y^3+xy+1 \\ y(1)=-1 \\ y'(1)=1 \end{cases} \Rightarrow y(x)=-\frac{1}{x}$$

$P_{II}(\alpha)$: $y''=2y^3+xy+\alpha$

若 (y,α) 满足 $P_{II}(\alpha)$，则 ① $(-y,-\alpha)$ 满足 $P_{II}(-\alpha)$.

② $\hat{y}_+(x)=-y-\dfrac{\alpha+\frac{1}{2}}{y'+y^2+\frac{x}{2}}$ 满足 $P_{II}(\alpha+1)$

$\hat{y}_-(x)=-y+\dfrac{\alpha-\frac{1}{2}}{y'-y^2-\frac{x}{2}}$ 满足 $P_{II}(\alpha-1)$

反射 S: $\alpha\mapsto-\alpha$. $\langle S,T\rangle=G$

平移 T: $\alpha\mapsto\alpha+1$ G 作用于 $\mathbb{C}$ A_1 型仿射 Weyl 群.

§5. 线性 O.D.E.

$(*)\begin{cases} y'=f(x,y)=A(x)y+B(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

$x\in I$. I 是 $\mathbb{R}$ 中开区间

$y\in\mathbb{R}^n$ $A\in C(I,M_n(\mathbb{R}))$.

$B\in C(I,\mathbb{R}^n)$.

$M_n(\mathbb{R})$: $n\times n$ 实矩阵构成的线性空间

$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$. 对于 $A\in M_n(\mathbb{R})$.

$\|A\|:=\max\limits_{y\in\mathbb{R}^n,\|y\|=1}\|Ay\|$

(1) $\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|=\|A(x)\|\,|y_1-y_2|\le\underbrace{\|A\|}_{\text{有界}}\|y_1-y_2\|\Rightarrow f$ 是局部 Lipschitz.

$(*)$ 的解在局部存在唯一.

(2) $\|f(x,y)\|\le\|A(x)\|\|y\|+\|B(x)\|\Rightarrow$ 解的极大存在区间可取为 I (整体存在解)

定理(叠加原理).

① 记 $S=\{\phi: I\to\mathbb{R}^n \mid \phi'=A(x)\phi\}$. 则 S 与 $\mathbb{R}^n$ 作为线性空间同构

② 若 $\phi_1'=A\phi_1+B_1$, $\phi_2'=A\phi_2+B_2$. 则 $\phi=\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$ 满足 $\phi'=A\phi+\lambda_1B_1+\lambda_2B_2$. (fact).

Pf ①. 任取 $x_0\in I$.

定义 ev_{x_0}: $S\to\mathbb{R}^n$. $\phi\mapsto\phi(x_0)$

单: $\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)\Rightarrow\phi_1=\phi_2$. (唯一性).

满: $\forall y_0\in\mathbb{R}^n$. $\exists\phi\in S$. s.t $\phi(x_0)=y_0$. (存在性). ⟩ 双射.

Def: $(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)(x)=\lambda_1\phi_1(x)+\lambda_2\phi_2(x)$ $ev_{x_0}(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)=\lambda_1\phi_1(x_0)+\lambda_2\phi_2(x_0)=\lambda_1 ev_{x_0}(\phi_1)+\lambda_2 ev_{x_0}(\phi_2)$. □

先考虑齐次情形，即 $B\equiv 0$. $y'=Ay$ (*) $y\in\mathbb{R}^n$

定义 若 $\phi_1\cdots\phi_n$ 是 S 的一组基，则称它们构成(*)的一个基础解系.

$\phi_i=\begin{pmatrix} y_{1,i}\\ y_{2,i}\\ \vdots\\ y_{n,i}\end{pmatrix}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. $\Phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$ $n\times n$ 矩阵. 则 $\Phi'=(\phi_1'\cdots\phi_n')$

$=(A\phi_1\cdots A\phi_n)$

$=A\Phi$ $\Phi(x)\in M_n(\mathbb{R})$

~~$\Phi'=A\Phi$~~

$\begin{cases}\Phi'=A\Phi\\ \Phi(x_0)=(\phi_1(x_0),\cdots,\phi_n(x_0))=\Phi_0\in M_n(\mathbb{R}).\end{cases}$

注意到：若 $\Phi'=A\Phi$，则对 $\forall$ 常数矩阵 $C\in M_n(\mathbb{R})$. $\tilde{\Phi}=\Phi C$ 也满足 $\tilde{\Phi}'=A\tilde{\Phi}$ (易证). $\tilde{\Phi}'=(\Phi C)'=\Phi'C+\Phi C'$ $=\Phi'C=A\Phi C=A\tilde{\Phi}$

Why $(A(x)B(x))'=A(x)B(x)+A(x)B'(x)$

$\because ev_x: S\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^n$ (同构). 故 $\phi_1\cdots\phi_n$ 是 S 的基，则 $\phi_1(x_0)\cdots\phi_n(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基.

即 Φ_0 是非退化的 ($\Leftrightarrow \det(\Phi_0)\neq 0$). $\det(\Phi(x))\neq 0$ 即可.

对于 $\phi_1\cdots\phi_n\in C(I,\mathbb{R}^n)$，定义 $W(x)=\det(\phi_1(x),\cdots\phi_n(x))$，叫作 $\phi_1\cdots\phi_n$ 的 Wronsky 行列式.

引理 (Liouville)

其中 $\phi_1\cdots\phi_n\in S$ 则 $W'(x)=tr(A)W$. $\Rightarrow W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}tr(A(t))dt}$

Proof: $W'(x)=\frac{d}{dx}\det(\Phi(x))$

$=tr\left(\frac{d\Phi}{dx}\Phi^*\right)$

$=tr(A\Phi\Phi^*)$

$=tr(A)|\Phi|=tr(A)\cdot W$ □

行列式求导！ $\Phi(x)=(y_{ij}(x))$

$\frac{d}{dx}\det(\Phi(x))=tr\left(\Phi^*(x)\cdot\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)$

Proof $=\sum_{i,j}\frac{dy_{ij}}{dx}\frac{\partial}{\partial y_{ij}}\det(\Phi(x))$

$\det(y_{ij})=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}y_{1\sigma(1)}\cdots y_{n\sigma(n)}$.

关于每个 y_{pq} 都是线性的. $(Ay_{pq}+B)$

$\therefore$ 对其求导，得对应代数余子式 (A)

$=\sum_{i,j}\frac{dy_{ij}}{dx}\Phi^*_{ij}=tr\left(\Phi^*\frac{d\Phi}{dx}\right)$ □

逆矩阵求导！

Φ 可逆. $\frac{d}{dx}\Phi^{-1}(x)=-\Phi^{-1}\frac{d\Phi}{dx}\cdot\Phi^{-1}$

Proof. $\Phi\cdot\Phi^{-1}=I$, $\frac{d}{dx}(\Phi\cdot\Phi^{-1}-I)=0$.

$\Leftrightarrow \Phi'\cdot\Phi^{-1}+\Phi(\Phi^{-1})'=0$

$\Rightarrow (\Phi^{-1})'=-\Phi^{-1}\cdot\Phi'\cdot\Phi^{-1}$ □

若 Φ 是 S 的基，则 $\tilde{\Phi}=\Phi\cdot(\Phi(x_0))^{-1}$ 仍为基础解系，且 $\tilde{\Phi}(x_0)=I$.

$B\neq 0$ 时. 若 Φ 是 $y'=Ay$ 的基础解系，则 $\hat{\Phi}=\Phi C$ 也是 $y'=Ay$ 的解.

考虑 $y'=Ay+B$ 的解. 设 $y=\Phi C(x)$ $y'=\Phi'C+\Phi C'=A\Phi C+\Phi C'$

对常数函数的线性变换

$=A\Phi C+B\Rightarrow \Phi C'(x)=B.$

$\Rightarrow C'(x)=\Phi^{-1}B$

即 $C(x)=\int\Phi^{-1}B\,dx$

∴ 解 $y(x)=\Phi(x)\left(C+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)B(t)\,dt\right)$

其中 $y(x_0)=\Phi(x_0)C=y_0 \Rightarrow C=(\Phi(x_0))^{-1}y_0$.

特别地，若 $\Phi(x_0)=I$，有 $y(x)=\Phi(x)\left(y_0+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(t)B(t)\,dt\right)$.

$y'=Ay \quad (*)$

已知 $\phi_1\cdots\phi_k$ 是 $(*)$ 的 k 个解.

$\Phi=(\phi_1,\cdots,\phi_k)$ 　　假设 Φ 满秩

$=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & & y_{nk}\end{pmatrix}$ 　不妨设 $\det\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ y_{k1} & \cdots & y_{kk}\end{vmatrix}\neq 0$.

$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$，其中 $\Phi_1=\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kk}\end{pmatrix}$ 　取 $\psi=\begin{pmatrix}\Phi_1 & 0\\ \Phi_2 & I_{n-k}\end{pmatrix}$，则 $\psi^{-1}=\begin{pmatrix}\Phi_1^{-1} & 0\\ -\Phi_2\Phi_1^{-1} & I\end{pmatrix}$

设 $y=\psi z$，则 $y'=\psi' z+\psi z'=A\psi z$

$\Rightarrow z'=\psi^{-1}(A\psi-\psi')z$ 　; $\psi=(\Phi, J)$ 　$J=\begin{pmatrix}0\\ I\end{pmatrix}$.

$A\psi-\psi'=(A\Phi, AJ)-(A\Phi, 0)=(0, AJ)=A\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ 　　$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$

$z'=\underbrace{\begin{pmatrix}\Phi_1^{-1} & 0\\ -\Phi_2\Phi_1^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}}\, z$ 　$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & \Phi_1^{-1}A_{12}\\ 0 & -\Phi_2\Phi_1^{-1}A_{12}+A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$ 　　其中 $z_1=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\end{pmatrix}$ 　$z_2=\begin{pmatrix}z_{k+1}\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases} z_1'=\Phi_1^{-1}A_{12}z_2 & (与 z_1 无关) \Rightarrow z_1=\int(\Phi_1^{-1}A_{12}z_2)\,dx \\ z_2'=(A_{22}-\Phi_2\Phi_1^{-1}A_{12})z_2 & (与 z_1 无关) \quad n-k 阶\end{cases}$

Ex. 设 $y''+q(x)y=0$ 的一个解是 y_1

设 $y=y_1 z$， $\underbrace{y_1''z}+2y_1'z'+y_1z''+\underbrace{qy_1z}=0$. 又 $y_1''+qy_1=0$

$\Rightarrow y_1z''+2y_1'z'=0$ 　　$\frac{z''}{z'}=-2\frac{y_1'}{y_1} \Rightarrow \ln z'=-2\ln y_1 \Rightarrow z'=\frac{1}{y_1^2} \Rightarrow z=\int\frac{dx}{y_1^2}$ （常数忽略不

$A \in M_n(\mathbb{R})$ or $M_n(\mathbb{C})$

$y' = Ay \rightarrow \Phi' = A\Phi,\ \Phi(x_0) = I.$

$\Rightarrow \Phi(x) = e^{Ax}$

对于 A. 定义 e^A 或 $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$

§ 常系数线性 O.D.E. (5.2)

$y' = Ay + B(x).\quad A \in M_n(\mathbb{R}).\ B \in C(I, \mathbb{R}^n)$

解: $\phi(x) = y_0 e^{(x-x_0)A}$

引理定义: $\cong (\mathbb{R}^{n^2}, \|\cdot\|)$

对于 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 如下级数收敛 $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$, 称为 A 的矩阵指数

证明. 记 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$

(WTS) $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N.\ \forall n > m > N.\ \|S_n - S_m\| < \varepsilon.$

$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} A^k\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \|A^k\| < \varepsilon.$

$\because e^{\|A\|} = \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n!} A^n$ 收敛. $\therefore$ 上式成立 □

Fact. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ 矩阵范数

$\|A\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \max_{y \ne 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$

$\|AB\| = \max_{\|y\|=1} \|(AB)y\| = \max_{\|y\|=1} \|A(By)\|$

$= \max_{\|y\|=1} \|A \cdot \frac{By}{\|By\|}\| \|By\|$

$\le \|A\| \cdot \max_{\|y\|=1} \|By\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ □

标记: 定义 $\Phi(x) = \exp(xA).\ x \in \mathbb{R}.\ A \in M_n(\mathbb{R}).$

$= \sum_{n \ge 0} \frac{x^n}{n!} A^n$

在 $\mathbb{R}$ 上紧一致收敛 (内闭一致). 且可逐项求导.

$\Phi' = A\Phi(x).\quad \Phi(0) = I.$

Proof: 对于 $|x| \le R.\ \|\frac{x^n}{n!} A^n\| \le \frac{1}{n!} \|A\|^n \cdot R^n \quad \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \|A\|^n R^n = e^{\|A\| R}$

由 Weierstrass 可知一致收敛

考虑 $\psi(x) = \sum_{n=0} \frac{n x^{n-1}}{n!} A^n = A \sum_{n=0} \frac{1}{n!} x^n A^n = A\Phi(x)$

于是 $\psi(x)$ 也是紧一致收敛的. ($\psi = \Phi'$).

于是 $\Phi' = A\Phi$. □

唯一解: $\phi(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-x_0)} B(t)\, dt.$

Q: 怎么算 $\exp A$?

$A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$.

$\exists$ 可逆阵 P 和一个 Jordan 标准型 J. s.t. $A = PJP^{-1}$

E. $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(PJP^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} PJ^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n\right)P^{-1} = P(\exp J)P^{-1}$

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N. \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad N^n = 0 \text{ (n足够大)}$$

$$(J_n(\lambda))^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (\lambda I)^p (N)^{k-p} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \lambda^p N^{k-p}$$

$\exp(J_n(\lambda))$ $\quad k-p=q \quad k=p+q$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \lambda^p N^{k-p} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q\geq 0} \frac{1}{(p+q)!} \frac{(p+q)!}{(p!)\,q!} \lambda^p N^{k-p} = \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} N^q\right) e^{\lambda}$$

$A=\lambda I,\ B=N \quad AB=BA$

$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$

Q：对于 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

$\exp A \cdot \exp B = \exp(Z)$

Baker-Campbell-Hausdorff.

$$Z = A+B+\underbrace{\tfrac{1}{2}[A,B]}_{A.B\text{交换子}} + \tfrac{1}{12}[A[A,B]] + \tfrac{1}{12}[[A,B],B] + \cdots \qquad [A,B]=AB-BA$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{r_i+s_i>0} \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i) \prod_{i=1}^{n} r_i!\, s_i!} [A^{(r_1)}, B^{(s_1)}, \cdots A^{(r_n)}, B^{(s_n)}]$$

其中 $A^{(r_i)}$ 表示 A 出现 r_i 次.

$$[z_1, z_2, \cdots, z_m] = [z_1[z_2[\cdots[z_{m-1}, z_m]]]]$$

Ex. $\frac{dx(t)}{dt} = [A.x(t)]$. $A \in M_n(\mathbb{R})$. 规定 $X(0)=x_0$

解 → $X(t) = e^{tA} x_0 e^{-tA}$, $X' = Ae^{tA}x_0e^{-tA} + e^{tA}x_0(-Ae^{-tA})$ 可交换 即 $Ae^{-tA} = e^{-tA}A$

$= A\,x(t) - x(t)A$

$X \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

$X \longmapsto Ax - xA$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个线性映射

$e^{-tR_A} x_0 = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^n R_A^n(x_0)$

$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^n x_0 A^n$

$= x_0 e^{-tA}$

引入新映射. $L_A: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ $\qquad R_A: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$X \longmapsto AX \qquad X \longrightarrow XA$

$X \longmapsto Ax - xA = (L_A - R_A)X$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (L_A - R_A)X$, $\phi(t) = e^{t(L_A - R_A)} x_0 = \boxed{e^{tL_A}}\left(\boxed{e^{-tR_A}}(x_0)\right)$ 线性映射 向量

指数映射

$= e^{tL_A}(x_0 e^{-tA})$

$L_A(R_A(x)) = L_A(xA) = AxA$ 即可交换 $= e^{tA} x_0 e^{-tA}$

$AxA = R_A(L_A(x))$

$y' = Ay$. $A = PJP^{-1}$

若 $\Phi(x) = e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$ 是基础解系.

则 $\tilde{\Phi} = \Phi P = Pe^{xJ}$ 也是基础解系。

$V = \mathbb{R}^n$. $A \in M_n(\mathbb{R})$. 若 λ 是 A 的一个特征值. $(A-\lambda I)\xi = 0$ 有解. 由 ξ_i 生成的一组空间为特征子空间

$(A-\lambda I)^n \xi = 0$ $n=1$ 为特征向量. n 比较大时. 即广义特征向量

$V_\lambda = \{\xi \in V \mid (A-\lambda I)^n \xi = 0\}$.

设 A 的不同特征向量是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 则 $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ "根子空间分解"

$\dim V_{\lambda_i} = m_i$ 就是 λ_i 在 A 的特征多项式中的代数重数.

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{"粗糙"}} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_1) & & & \\ & K_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_k(\lambda_k) \end{pmatrix}$$ 每个 $K(\lambda)$ 是一些 Jordan 块的组合.

设 λ_0 是 A 的一个特征值

$$K = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I + N_0 \quad N_0^N = 0$$

$\dim V_{\lambda_0} = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$

$m = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ 是 $\lambda - \lambda_0$ 在 A 的极小多项式中的次数.

$(K - \lambda_0 I)^m = 0$

设 A 的 Jordan 标准型是 $J = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$.

$P = (P_1, P_2)$. $P_1 = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$.

$\xi_1 \cdots \xi_N$ 是 V_{λ_0} 的一组基

$$\tilde{\Phi} = Pe^{xJ} = (P_1, P_2)e^{x\begin{pmatrix} K & \\ & L \end{pmatrix}} = (P_1, P_2)\begin{pmatrix} e^{xK} & 0 \\ 0 & e^{xL} \end{pmatrix} = (P_1 e^{xK}, P_2 e^{xL})$$

$A = PJP^{-1} \Rightarrow AP = PJ$

$\Rightarrow A(P_1, P_2) = (P_1, P_2)\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$

$(AP_1, AP_2) = (P_1 K, P_2 L)$

$P_1 e^{xK} = P_1 \exp((\lambda_0 I + N_0)x) = P_1 e^{\lambda_0 x}\left(\sum_{p=0}^{m} \frac{x^p}{p!} N^p\right)$ —— 对应于 λ_0 的解的形式:

引理: 设 λ_0 是 A 的特征值. 它在 A 的极小多项式中的代数重数 m_0.

则 $y' = Ay$ 有形如 $\varphi(x) = e^{\lambda_0 x}\left(\sum_{l=0}^{m_0-1} \xi_l x^l\right)$ 的解. 其中 ξ_l 是 V_{λ_0} 中的向量. 且 $\xi_l = \frac{1}{l!}(A-\lambda_0 I)^l \xi_0$.

$V_{\lambda_0} = \ker((A-\lambda_0 I)^n)$

证: $\varphi'(x) = \lambda_0 e^{\lambda_0 x}\left(\sum_{l\geq 0} \xi_l x^l\right) + e^{\lambda_0 x}\underbrace{\sum_{l=1} \xi_l l x^{l-1}}_{\sum_{l=0} \xi_{l+1}(l+1)x^l}$

$= A\left(e^{\lambda_0 x}\sum_{l\geq 0} \xi_l x^l\right)$

$\Rightarrow \lambda_0 \sum_{l\geq 0} \xi_l x^l + \sum_{l\geq 0} \xi_{l+1}(l+1)x^l = \sum_{l\geq 0} A\xi_l x^l \Rightarrow \lambda_0 \xi_l + (l+1)\xi_{l+1} = A\xi_l$.

$\Rightarrow (l+1)\xi_{l+1} = (A - \lambda_0 I)\xi_l$. 取 $(A-\lambda_0 I)^n \xi_0 = 0$.

Ex

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 \qquad \lambda = 1.$$

则取 $\xi_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = (A - I)\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 - c_0 \\ 0 \\ a_0 - b_0 - c_0 \end{pmatrix}$.

$$\xi_2 = \tfrac{1}{2}(A-I)^2\xi_0 = 0. \Rightarrow \phi(x) = e^x(\xi_0 + x\xi_1)$$

特别地，若 A 有 n 个互异特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 则 $\Phi = (\xi_1 e^{\lambda_1 x}, \cdots, \xi_n e^{\lambda_n x})$ ξ_i 是 λ_i 对特征向量

总结算法：① 解 A 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

② 对每个 λ_i 找 V_{λ_i} 的一组基 $\xi_{i,1}, \cdots, \xi_{i,d_i}$. $d_i = \dim V_{\lambda_i}$

利用 φ_{λ_i} 得到 $\phi_{i,1} \cdots \phi_{i,d_i}$

③ $\Phi = (\phi_{11}, \cdots \phi_{1,d_1}, \phi_{2,1}, \cdots \phi_{2,d_2} \cdots \phi_{k,1} \cdots \phi_{k,d_k})$ $\quad n = d_1 + \cdots + d_k$

若 Φ 是复的 ① 有 $\frac{1}{2}(\bar{\Phi} + \Phi)$ 与 $\frac{1}{2i}(\Phi - \bar{\Phi})$ 是实的.（会损失一些东西）.

② $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) \cdot \underbrace{(\Phi(x_0))^{-1}}_{\text{求逆}}$. 则 $\tilde{\Phi}(x_0) = I$.（初值是实，则结果一定是实的）

Cor：若 A 的特征值的实部全是负的，则当 $x \to \infty$ 时，$\overset{e^{\lambda x}p(x)}{\overset{\shortparallel}{y}} \to 0$.

§5.3 高阶线性 O.D.E.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x). \quad \text{其中 } a_i(x) \text{ 可变系数.}$$

记 $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ $\quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ b(x) - a_n y - \cdots - a_1 y^{(n-1)} \end{pmatrix} = AY + B$. 其中. $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

(*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

"刘维尔公式"

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} tr(A)\,dx} = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}$$

Thm. 设 $\Phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$ 是 (*) 的齐次方程的基础解系.

$\phi^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(t)}{W(t)} b(t)\,dt$、其中 $W_j(t)$ 是 Φ 的第 n 行 j 列代数余子式.

证明: $\Phi^* = \Phi \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1} B\,dt$.

$= \Phi \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W(t)} \boxed{\Phi^*(t) B}\,dt$.

$\Phi^* = \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{n1} \\ W_{12} & \cdots & W_{n2} \\ \vdots & (W_{ij}) & \vdots \\ W_{1n} & \cdots & W_{nn} \end{pmatrix}$ W_{ij} 是 Φ 的第 (i,j) 个代数余子式.

$\Phi^* B = \begin{pmatrix} W_1 b \\ W_2 b \\ \vdots \\ W_n b \end{pmatrix}$ $\quad B(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}$

Ex. $y'' + y = f(x)$

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

$\Phi^* = \Phi\, C(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^* \\ (\phi^*)' \end{pmatrix}$ $\quad C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \phi^*(x)$.

$(\phi^*)' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

即有 $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

$\Rightarrow -C_1 \sin x + C_1' \cos x + C_2 \cos x + C_2' \sin x$

$\Rightarrow C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$. ①

$(\phi^*)'' = -C_1' \sin x - C_1 \cos x + C_2' \cos x - C_2 \sin x$.

$(\phi^*)'' + \phi^* = -C_1'(x) \sin x - C_2' \cos x = f(x)$ ②

代回原方程.

$\Phi^* = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} dt$ ✗

由①② $\Rightarrow C_1' = -f(x)\sin x \Rightarrow C_1 = \int_{x_0}^{x} -f(t)\sin t\,dt$

$C_2' = f(x)\cos x \Rightarrow C_2 = \int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,dt$.

$\phi^*(x) = \sin x \int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,dt + \cos x \int_{x_0}^{x} -f(t)\sin t\,dt$

$= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,dt$.

"卷积公式"

考虑常系数情况 (a_i 均为常数 $\in\mathbb{R}$) $\quad A = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix}$

$$f_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \overset{记}{=} L(\lambda)$$

Thm. 设 $f_A(\lambda)$ 的根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ (互异). 重数为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ (且有 $n_1 + \cdots + n_k = n$).

则 $x^l e^{\lambda_j x}$ $\quad j = 1, \cdots, k$, $l = 0, \cdots, n_j - 1$

就构成 (*) 的基础解系

证明：记 $D=\frac{d}{dx}$

要说明 $e^{\lambda_j x}$ 是解

只需证

Case: $l=0$ $L(D)\left(e^{\lambda_j x}\right)=\left(e^{\lambda_j x}\right)^{(n)}+a_1\left(e^{\lambda_j x}\right)^{(n-1)}+\cdots+a_n\left(e^{\lambda_j x}\right)$

$$=\left(\lambda_j^n+a_1\lambda_j^{n-1}+\cdots+a_n\right)\left(e^{\lambda_j x}\right)=\underbrace{L(\lambda_j)}_{0}\left(e^{\lambda_j x}\right)=0.$$

一般地 $L(D)\left(x^l g(x)\right)=?$ $=\left(\sum_{p=0}^{l}\binom{l}{p}x^p L^{(l-p)}(\lambda_j)\right)\left(e^{\lambda_j x}\right)=0$ $l<n_j$. 则 $L^{(l-p)}(\lambda_j)=0$

$D(xg)=xDg+g=(xD+1)g.$

$D^2(xg)=(xD^2+2D)g$

$D^k(xg)=(xD^k+kD^{k-1})g$

$L(D)(xg)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_iD^{n-i}\right)(xg)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(xD^{n-i}+(n-i)D^{n-i-1}\right)g$

$a_0=1.$

$$=\left(xL(D)+L'(D)\right)g$$

$\therefore$ $L(D)\left(xe^{\lambda_j x}\right)=xL(D)\left(e^{\lambda_j x}\right)+L'(D)\left(e^{\lambda_j x}\right)$

若 λ_j 是 n_j 重根. $n_j>1$

$$=xL(\lambda_j)\left(e^{\lambda_j x}\right)+L'(\lambda_j)\left(e^{\lambda_j x}\right)$$

$$=0+0$$

$$=0. \qquad \square.$$

λ 为复数时. $\bar{\lambda}$ 也是根. $C_1x^le^{\lambda x}+C_2x^le^{\bar{\lambda}x}$ $(\lambda=\alpha+i\beta)$ $x^le^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x^le^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Ex. $y^{(4)}-4y^{(3)}+8y''-8y'+3y=0.$

$f(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3.$

$$=(\lambda-1)^2\left((\lambda-1)^2+2\right).$$

令 $f(\lambda)=0.$ $\lambda=1$. (2重). $\lambda=1\pm\sqrt{2}i$

e^x xe^x $e^x\cos\sqrt{2}x$ $e^x\sin\sqrt{2}x$

$\therefore$ 通解为上述四个的线性组合

考虑非齐次情况

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b(x) \quad (*)$$

$b(x)=P(x)e^{\mu x}$ $P\in\mathbb{R}[x].$

Fact: 若 $b(x)=P(x)e^{\mu x}$. 则 $(*)$ 有形如 $\varphi^*(x)=Q(x)e^{\mu x}$ 的解

$Q(x)\in\mathbb{R}[x].$

$V=C^\infty(\mathbb{R}).$

$D=\frac{d}{dx}$ $V\to V$

$L(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n:$ $V\to V$

若 ϕ^{+} 是解，对 $\quad e^{\mu x}: \phi \mapsto e^{\mu x}\phi$

$$L(D)\left(Q(x)e^{\mu x}\right) = P(x)e^{\mu x}$$

$$\underbrace{\left[e^{-\mu x}\cdot L(D)e^{\mu x}\right]}(Q(x)) = P(x) \qquad P, Q \in R[x]$$

"算子"：

$$\left(e^{-\mu x}\cdot D\cdot e^{\mu x}\right)(g(x)) = e^{-\mu x}\left(e^{\mu x}g\right)' = e^{-\mu x}\left(e^{\mu x}g' + \mu e^{\mu x}g\right) = g' + \mu g = (D+\mu)g$$

$$\left(e^{-\mu x} D^{k} e^{\mu x}\right)^{k}\cdot \ = (D+\mu)^{k}g$$

$$e^{-\mu x}L(D)e^{\mu x} = e^{-\mu x}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i D^{n-i}\right)e^{\mu x} = \sum_{i=0}^{n}a_i(D+\mu)^{n-i} = L(D+\mu)$$

$$\Rightarrow \quad L(D+\mu)(Q(x)) = P(x)$$

Case I. $L(\mu)\neq 0$. $\quad L(D+\mu) = L(\mu) + \underbrace{L'(\mu)D + \frac{1}{2}L''(\mu)D^2 + \cdots}$

$$= L(\mu) + K$$

K是微分算子，满足对任意 $P\in R[x]$ $\exists M$, s.t $K^{M}(P)=0$. 局部幂零性

$\Rightarrow \quad L(D+\mu)$ 可逆

$$\left(L(D+\mu)\right)^{-1} = \left(L(\mu)+K\right)^{-1} = L(\mu)^{-1}\left(1+\frac{K}{L(\mu)}\right)^{-1} \qquad \left(\frac{1}{1+q} = 1-q+q^2-\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{L(\mu)}\left(1-\frac{K}{L(\mu)}+\frac{K^2}{L(\mu)^2}-\cdots\right)$$

此时有

$$\underset{\text{求得}}{Q(x)} = L(D+\mu)^{-1}\underset{\text{已知}}{P(x)}. \qquad \square$$

取Q为与P相同次数多项式

Case II. $L(\mu)=0$. 设 μ 是 L 的 m 重根 $\quad L(\mu)=L'(\mu)=\cdots L^{(m-1)}(\mu)=0$

$$L(D+\mu) = \frac{L^{(m)}(\mu)}{m!}D^{m} + \frac{L^{(m+1)}(\mu)}{(m+1)!}D^{m+1} + \cdots \quad (L^{(m)}(\mu)\neq 0.)$$

$$= \left(\frac{L^{(m)}(\mu)}{m!} + K\right)D^{m}$$

$$L(D+\mu)Q = P \Leftrightarrow \left(\frac{L^{(m)}(\mu)}{m!}+K\right)Q^{(m)}(x) = P(x)$$

$$\Rightarrow Q^{(m)}(x) = \left(\frac{L^{m}(\mu)}{m!}+K\right)^{-1}P(x)$$

积 m 次得 $Q(x)$

取 $Q = x^{n}\tilde{Q}(x)$，$\tilde{Q}$ 是与P次数相同的多项式

Ex. $x^2y''+3xy'+13y=0$. $(x>0)$

let $t=\ln x \quad (x=e^{t})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

§ 8.2 解的稳定性

苏联

8.2.1 Lyapunov 稳定性

"Finally exam."

1. 证明齐次方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 有积分因子 $\mu=\dfrac{1}{xP+yQ}$

Proof: $\dfrac{P}{Q}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. 曲线族的等角轨线

$\Phi(x,y,c)=0$ —— 全微分，得 $\dfrac{dy}{dx}=H(x,y)=k_0$，有 c 时要消去 c.

$\tan\alpha=\dfrac{k-k_0}{1+kk_0}$.