部分积的上界估计与 Gautschi 不等式

MYJ

2025 年 9 月 4 日

问题 1. 尝试给出如下估计的证明:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{\sqrt{2N}}. \tag{1}$$

文中辑录的诸多做法与尝试，仅为管见所及，疏漏与不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

1. 尝试简单的积分估计的办法

问题 2. 一个很自然的处理，取对数转换为对部分和的估计:

$$\sum_{n=1}^{N}\log\left(1-\frac{1}{2n}\right)<-\frac{1}{2}\log(2N). \tag{2}$$

1.1 直接估计 (回过来看并不本质)

定理 如果函数 $f:[x,y]\to\mathbb{R}$ 是单调函数那么求和可以被积分估计 (量化版本的):

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}:y\leq n\leq x} f(n)=\int_y^x f(t)\,dt+O(|f(x)|+|f(y)|).$$

结合上述定理，我们考虑简单的积分估计，函数 $f(t) := \log\left(1-\frac{1}{2t}\right)$ 是单调增加的，因此

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) < \int_1^{N+1} f(t)\mathrm{d}t.$$

不过这样放缩过大，无法满足精度。除了动用更精确的估计手法以外，还有一个常见且简单的放缩的技巧：**考虑对放缩当中误差和贡献最大的项，然后把这个项单独拿出来处理**。此处我们把 $f(1) = -\log(2)$ 单独拿出来不做放缩以提高精度：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} f(k) &< f(1) + \int_2^{N+1} \log\left(1-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t \\ &< -\log(2) - \frac{1}{2}(\log(N+1) - \log 2) \\ &= -\tfrac{1}{2}\log(2N+2) \\ &< -\tfrac{1}{2}\log(2N).\end{aligned}$$

注意 这里既然最后依旧是对被积分对象 $\log(1-\frac{1}{2t})$ 做放缩，那么这样与对和做逐项放缩有何区别呢？积分放缩的好处是，如果函数恰好积分的结果是简单的，那么我们就可以用一个简单的（我们熟悉的）函数作为和的上界。但是如果积分并不简单（熟悉），何必积分放缩？ ■

1.2 更为本质的积分放缩

首先考虑逐项估计的办法，令 $S_N := \sum_{n=1}^{N} \log\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, 则

$$S_N \le -\log(2) - \tfrac{1}{2}(H_N - 1).$$

而真正适合做积分放缩的是其中的调和数序列 H_N[1]，因为其中被求和的每一项 $\frac{1}{n}$ 其积分都是足够简单的。现在我们要做的也正是要证明

> 问题 3. 调和数 H_N 满足
>
> $$H_N > \log(N) + 1 - \log 2, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

这个结果从形式上来说应该是对的，因为 $1-\log(2) \approx 0.31$, 而调和数的渐近结果是 $H_N = \log(N) + \gamma + O(1/N)$, 其中 $\gamma \approx 0.58$. 那么接下来我们就用简单的积分估计来证明问题 3.

[1] 调和数的定义为：$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}$.

证明 因 $1/x$ 单调递减，有
$$\sum_{k=a}^{N}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x < \sum_{k=a}^{N}\frac{1}{k}.$$
整理得
$$\begin{aligned} H_N &> \int_a^{N+1}\frac{1}{x}\,dx + H_{a-1} \\ &> \log(N+1) - \log(a) + H_{a-1} \\ &> \log(N) + H_{a-1} - \log(a). \end{aligned}$$
我们立刻意识到，问题 3 中的不等式，不过是 $a=2$ 的情况下的结果罢了。因此问题 3 得到了证明，于是问题 2 也得到了证明，等价地问题 1 也得到了证明。 ■

2. 一些初等的做法

2.1 直接验证差分

为了解决问题 2，我们只需验证，对任意正整数 N 是否成立：
$$\log\left(1-\frac{1}{2(N+1)}\right) < -\tfrac{1}{2}\big(\log(2N+2)-\log(2N)\big).$$
该不等式等价于
$$\log(2N+1) < \frac{\log(2N+2)+\log(2N)}{2}.$$
由于 $\log(x)$ 是上凸函数，因此有
$$\frac{\log(x)+\log(y)}{2} \geq \log\left(\frac{x+y}{2}\right).$$
对于 $N\geq 1$, 令 $x=2N$, $y=2N+2$，则右边为 $\log(2N+1)$，故不等式成立。$N=0$ 时，满足
$$\log(\frac{1}{2}) < -\tfrac{1}{2}\log(2).$$
因此问题 2 得证。

2.2 对乘法的逐项放缩

此种做法是不基于问题 2 的，我们直接去解决问题 1 中的结果。因为问题中我们已经知道放缩的最终目标，那么我们可以尝试去逐项验证。

令问题 1 中左边的乘积 $P_N := \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, 右边为 $Q_N := \frac{1}{\sqrt{2N}}$. 那么倘若我们可以证明

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} < \frac{Q_n}{Q_{n-1}},$$

那么

$$P_1 \prod_{n=2}^{N} \frac{P_n}{P_{n-1}} < Q_1 \prod_{n=2}^{N} \frac{Q_n}{Q_{n-1}}.$$

而左边就是 P_N，右边就是 Q_N. 当然，如果读者稍加计算，就可以知道这道题并不能用此方法解决。

以上三种做法的核心想法：如果我们需要给一个乘积，或者一个和 S_n 同一个函数表示的上界 U_n，使得

$$S_n \leq U_n$$

对 $n > M$ 都成立。通常来说 U_n 的表达和性质要比 S_n 要简单很多，这也是为什么上界估计是有用的原因，我们用一个有误差但可以接受的上界换来一个一窥复杂的 S_n 的一些基本信息的机会。

为了得到这个 U_n 我们其中一种主要的想法是：

1. S_n 是否可以本身就非常容易求乘积或者和，并且乘积或者和是对我们而言比较简单或者熟悉的形式？比如假设 $S_n = H_n$ 是调和数，或者其他什么我们很熟悉的特殊函数，亦或者就是多项式等等。

2. 如果第一个做不到，我们的想法是，是否可以通过放缩得到一个 S_n' 使得 S_n' 与 S_n 之间的误差符合要求，同时 S_n' 具有一个简单或者熟悉的表达式。比如积分放缩，寻求的就是积分的形式是对我们而言是简单的或者非常熟悉的。再比如 2.1,2.2 中的 telesocping sum 以及 telescoping product 都是属于这种类型的形式。

有了这个想法以后，我们再来看做法 3.

3. 与 Γ 函数的关系

从上面的“核心想法”的角度来看，前文（第 1 节，第 2.1，2.2 节）中的解法的基本出发点都是：“认为 P_N 或者 $\log(P_N)$ 其本身不是一个简单的或者我们熟悉的形式，因此需要放缩成一个新的简单的或者熟悉的形式”。

而这一节的解法的出发点则是：“P_N 真的不熟悉吗？不！其实 P_N 我们还是比较熟悉的！”并且最后的结果告诉我们，这样做精度能达到更好。

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(N+1/2)}{\Gamma(N+1)}.$$

这个结果可以从 Wallis 公式其中一个步骤得到:

$$P_N = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2N} dt.$$

考虑到这个积分和 β 函数之间的关系:

$$\beta(z_1, z_2) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2z_1-1}\cos(t)^{2z_2-1} dt.$$

所以上述的乘积我们可以写成

$$P_N = \frac{1}{\pi}\beta(N+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(N+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(N+1)}.$$

为进一步估计，我们给出下面的定理：

定理 (Gautschi 不等式, 1959) 当 $s \in (0,1), x > 0$, 我们有如下不等式

$$x^{1-s} < \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} < (1+x)^{1-s}. \tag{4}$$

回到题目证明，如果我们用 Gautschi 不等式，放在此问题当中 $s = 1/2$ 时，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(N+1)}} < P_N < \frac{1}{\sqrt{\pi N}}.$$

那么自然

$$P_N < \frac{1}{\sqrt{\pi N}} < \frac{1}{\sqrt{2N}}.$$

3.1 Gautschi 不等式的证明

为了证明的完整性与可读性，我们此处给出如上定理，即 Gautschi 不等式的详细证明。

证明 不等式的主要原理是利用 $\Gamma(x), x > 0$ 的对数下凸性，即令 $g(x) = \log(\Gamma(x))$, 则有

$$g(tu + (1-t)v) < tg(u) + (1-t)g(v), \quad u \neq v.$$

对于这一点，我们只需要计算 $g(x)$ 的二阶导数即可，

$$g^{(2)}(x) = \frac{\Gamma^{(2)}(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}.$$

考虑到 $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(k)} &= \int_0^\infty \log(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \log(t)^k h^2(x,t) dt.\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)}(x)\Gamma(x) &= \|\log(t)h(x,t)\|^2 \cdot \|1 \cdot h(x,t)\|^2 \\ &> \langle \log(t)h(x,t), h(x,t)\rangle \\ &= \int_0^\infty \log(t)h^2(x,t)dt \\ &= \Gamma'(x).\end{aligned}$$

故对数下凸性自然也可以写成 $\Gamma(tu + (1-t)v) < \Gamma(u)^t\Gamma(v)^{1-t}$.

- 令 $u = x, v = x+1$ 和 $t = 1-s$, 那么:

$$\Gamma(s+x) < \Gamma(x)^{1-s}\Gamma(x+1)^s = x^{s-1}\Gamma(x+1).$$

- 反过来，令 $u = x+s, v = x+s+1$ 和 $t = s$, 得到:

$$\Gamma(x+1) < \Gamma(x+s)^s\Gamma(x+s+1)^{1-s} = (x+s)^{1-s}\Gamma(x+s).$$